

**Dal volume PISA 2003, Valutazione dei quindicenni, Armando 2004**

La concezione di matematica proposta dal PISA rimuove il pericolo di una visione eccessivamente riduttiva della disciplina e ne promuove una definizione basata sul concetto di *literacy*<sup>1</sup> *matematica* ovvero *la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modo che rispondano alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione.*

Pagg 38 e seguenti
--------------------

**Il contenuto matematico – le quattro “idee chiave”**

I concetti, le strutture e le idee matematiche sono stati messi a punto quali strumenti per organizzare i fenomeni del mondo naturale, sociale e mentale. A scuola, i programmi di matematica sono stati organizzati logicamente in ambiti di contenuto (per es. aritmetica, algebra, geometria) che riflettono branche del pensiero matematico storicamente consolidate e facilitano lo sviluppo di un programma di insegnamento strutturato. Tuttavia, nel mondo reale, i fenomeni che si prestano ad essere trattati in termini matematici non si presentano secondo la stessa organizzazione logica. Raramente i problemi sorgono in modi e contesti che permettono di riuscire a comprenderli e a risolverli applicando conoscenze provenienti da un'unico ambito.

Dal momento che l'indagine OCSE/PISA mira ad accertare la capacità degli studenti di risolvere problemi reali, la gamma dei contenuti inclusi nella valutazione è stata definita servendosi di un approccio fenomenologico per descrivere i concetti, le strutture e le idee matematiche. Questo significa che il contenuto viene descritto in relazione ai fenomeni e ai tipi di problemi per i quali è stato costruito. Tale approccio garantisce una coerenza tra l'impostazione della valutazione e la definizione dell'ambito della competenza matematica e, allo stesso tempo, copre una gamma di contenuti che comprende quanto generalmente si trova sia in altre indagini sulla matematica sia nei curricula nazionali di matematica.

Le quattro idee chiave che seguono sono utilizzate nell'indagine PISA 2003 in quanto consentono di seguire lo sviluppo storico della disciplina, di abbracciare in modo esauriente l'ambito matematico e di riflettere i temi principali del curriculum scolastico:

- *quantità*;
- *spazio e forma*;
- *cambiamento e relazioni*;
- *incertezza*.

Un'idea chiave può essere concepita come un insieme coerente di fenomeni e di concetti che si possono incontrare in una molteplicità di situazioni differenti. Per sua natura, ciascuna idea chiave può essere considerata come una sorta di nozione generale che ha a che fare con un qualche ambito generale di contenuto. Questo implica che le idee chiave non possano essere delineate con precisione una in rapporto all'altra. Ciascuna di esse rappresenta piuttosto una particolare prospettiva, o punto di vista, che può essere concepito come dotato di un nucleo, di un centro di gravità, e di contorni in un certo senso indistinti che consentono l'intersezione con altre idee chiave. In teoria, ogni idea chiave si interseca con tutte le altre. Le quattro idee chiave sono descritte sinteticamente nei seguenti paragrafi e discusse più approfonditamente più avanti.

***Quantità***

Questa idea chiave è centrata sul bisogno di quantificare per organizzare la realtà. Tra i suoi aspetti più importanti vi sono la comprensione delle dimensioni relative, il riconoscimento di modelli numerici e l'uso di numeri per rappresentare quantità e attributi quantificabili degli oggetti del mondo reale (misure e conteggi). Inoltre, la *quantità* ha a che fare con l'elaborazione e la comprensione di numeri rappresentati in vari modi.

Un aspetto saliente del lavorare con la *quantità* è il ragionamento quantitativo. Componenti essenziali del ragionamento quantitativo sono: il concetto di numero, l'uso di diverse rappresentazioni numeriche, la comprensione del significato delle operazioni, l'aver un'idea dell'ordine di grandezza dei numeri, i calcoli eleganti da un punto di vista matematico, i calcoli mentali e le stime.

***Spazio e forma***

Dovunque intorno a noi vi sono modelli: nel linguaggio orale, nella musica, sul video, nel traffico, nelle costruzioni edili e nell'arte. Le forme possono essere considerate come modelli: case, uffici, ponti, stelle di mare,

---

<sup>1</sup> Poiché la traduzione letterale del termine inglese *literacy* con quello italiano di *alfabetizzazione* risulta riduttiva rispetto al significato attribuitogli in letteratura, si è preferito mantenere il termine inglese.

fiocchi di neve, piante topografiche delle città, quadrifogli, cristalli e ombre. I modelli geometrici possono funzionare come modelli relativamente semplici di molti tipi di fenomeni ed è possibile e desiderabile studiarli a tutti i livelli (Grünbaum, 1985).

Quando si analizzano le componenti della forma e si riconoscono le forme in diverse rappresentazioni e in diverse dimensioni, lo studio della forma e delle costruzioni comporta la ricerca di somiglianze e differenze. Lo studio delle forme è strettamente legato al concetto di “capire lo spazio”. Questo significa imparare a conoscere, esplorare e conquistare lo spazio per poter vivere, respirare e muoversi in esso con una maggiore consapevolezza (Freudenthal, 1973).

Per ottenere ciò, dobbiamo essere in grado di capire le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni: dobbiamo essere consapevoli di come vediamo le cose e del perché le vediamo così, dobbiamo imparare a navigare attraverso lo spazio e attraverso le costruzioni e le forme. Ciò significa capire la relazione tra forme e immagini o rappresentazioni visive, come la relazione tra una città reale e le fotografie e le carte topografiche di quella città; significa anche capire come si possano rappresentare gli oggetti tridimensionali in due dimensioni, come si creino e si interpretino le ombre e che cosa sia la prospettiva e come funzioni.

### ***Cambiamento e relazioni***

Ogni fenomeno naturale è la manifestazione di un cambiamento e nella realtà che ci circonda si possono osservare tra i fenomeni molte relazioni, sia temporanee che permanenti. La trasformazione degli organismi durante la loro crescita, il ciclo delle stagioni, il flusso e riflusso delle maree, i cicli di disoccupazione, i cambiamenti del tempo, gli indici della borsa valori non sono che alcuni esempi. Alcuni di questi processi di cambiamento comportano semplici funzioni matematiche, che possono essere lineari, esponenziali, periodiche o logistiche, sia discrete che continue, e possono essere descritti o modellizzati in base a esse. Molte relazioni, tuttavia, rientrano in più di una categoria e l'analisi dei dati è molto spesso indispensabile per determinare il tipo di relazione presente. Le relazioni matematiche assumono spesso la forma di equazioni o disequazioni, ma vi possono anche essere relazioni di natura più generale (come relazioni di equivalenza, divisibilità, inclusione, per citare solo alcuni esempi).

Pensare in termini funzionali, cioè pensare in termini di relazioni, è uno degli obiettivi disciplinari fondamentali dell'insegnamento della matematica (MAA, 1923). Le relazioni possono essere rappresentate in molti modi, tra i quali vi sono le rappresentazioni simboliche, algebriche, grafiche, tabulari e geometriche. Rappresentazioni diverse possono essere utili per scopi diversi e hanno proprietà differenti. Quindi, quando si ha a che fare con situazioni e compiti problematici, il passaggio da una rappresentazione all'altra è spesso un procedimento chiave.

### ***Incertezza***

L'attuale “società dell'informazione” offre una gran quantità di informazioni, presentandole spesso come precise, scientifiche e dotate di un certo grado di certezza. Nella vita quotidiana, tuttavia, ci imbattiamo in risultati elettorali incerti, ponti che cedono, crolli del mercato azionario, previsioni del tempo inattendibili, pronostici inesatti sulla crescita demografica, modelli economici imprevedibili e molte altre dimostrazioni dell'incertezza del nostro mondo.

La constatazione di tale *incertezza* chiama in causa due argomenti tra loro correlati: i dati e il caso. Tali fenomeni sono oggetto di studi matematici rispettivamente nella statistica e nella teoria della probabilità. Alcune osservazioni relativamente recenti circa i curricula scolastici concordano sul fatto che la statistica e la probabilità oggi dovrebbero occupare un posto molto più importante che nel passato (*Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools*, 1982; LOGSE, 1990; MSEB, 1990; NCTM, 1989; NCTM, 2000).

Attività e concetti matematici specifici in questo ambito sono la raccolta e l'analisi dei dati, la loro rappresentazione/visualizzazione, la probabilità e l'inferenza statistica.

Nel paragrafo che segue si affronta l'aspetto più importante del quadro di riferimento della matematica, cioè il discorso sulle competenze che gli studenti devono attivare quando cercano di risolvere un problema. Tali competenze sono discusse complessivamente sotto il titolo di processi matematici.

Pagg. 44 e seguenti

### ***Le competenze***

Il paragrafo precedente tratta i principali concetti e processi che sono messi in gioco nella matematizzazione. Una persona che affronta con successo il processo di matematizzazione nell'ambito di una molteplicità di situazioni e contesti, extra e intra-matematici, e di diverse idee chiave, deve possedere un certo numero di competenze matematiche che, nel loro insieme, possono essere considerate come costitutive della competenza matematica. Ciascuna di queste competenze può essere posseduta a diversi livelli di padronanza. Le diverse fasi del processo di matematizzazione si basano in modo differenziato su queste competenze, sia per quanto riguarda le specifiche competenze messe in gioco, sia per quanto riguarda il livello di padronanza richiesto. Per

individuare e analizzare queste competenze, il progetto OCSE/PISA ha deciso di fare riferimento a otto tipiche competenze matematiche, che si basano, nella loro forma attuale, sul lavoro di Niss (1999) e dei suoi colleghi danesi. Definizioni analoghe si possono trovare nei lavori di molti altri studiosi (come mostrato da Neubrand *et al.*, 2001), ma alcuni dei termini usati vengono impiegati in modo diverso dai diversi autori.

1. *Pensiero e ragionamento.* Questa competenza consiste: nel formulare domande che sono tipiche della matematica (“C’è...?”, “Se è così, quanti?”, “Come troviamo...?”); nel conoscere i tipi di risposte che la matematica dà a tali domande; nel distinguere tra diversi tipi di enunciati (definizioni, teoremi, congetture, ipotesi, esempi, affermazioni di tipo condizionale); e nel comprendere e trattare la portata e i limiti di determinati concetti matematici.
2. *Argomentazione.* Questa competenza consiste: nel conoscere cosa sono le dimostrazioni matematiche e come differiscono da altri tipi di ragionamento matematico; nel seguire catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità; nell’aver un’idea dell’euristica (“Che cosa può o non può accadere? E perché?”); e nel creare ed esprimere ragionamenti matematici.
3. *Comunicazione.* Questa competenza consiste nel sapersi esprimere in vari modi su questioni di carattere matematico, in forma orale e scritta e nel comprendere gli enunciati scritti od orali di altre persone circa tali questioni.
4. *Modellizzazione.* Questa competenza consiste: nella strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata; nel tradurre “la realtà” in strutture matematiche; nell’interpretare i modelli matematici in termini di “realtà”; nel lavorare con un modello matematico; nel validare il modello, nel riflettere, analizzare e valutare un modello e i suoi risultati; nel comunicare ad altri il modello e i suoi risultati (compresi i limiti di tali risultati); e nel monitorare e controllare il processo di modellizzazione.
5. *Formulazione e risoluzione di problemi.* Questa competenza consiste nel porre, formulare e definire diversi tipi di problemi matematici (quali problemi “puri”, “applicati”, “aperti” e “chiusi”) e nel risolverli in vari modi.
6. *Rappresentazione.* Questa competenza consiste: nel decodificare e codificare, tradurre, interpretare e distinguere le diverse forme di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche e le relazioni tra le varie rappresentazioni; nello scegliere e passare da una forma di rappresentazione a un’altra, in relazione alla situazione e allo scopo.
7. *Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni.* Questa competenza consiste: nel decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e formale e nel comprendere il suo rapporto con il linguaggio naturale; nel tradurre il linguaggio naturale in linguaggio simbolico/formale; nel lavorare con enunciati ed espressioni che contengano simboli e formule; e nell’usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli.
8. *Uso di sussidi e strumenti.* Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti (comprese le tecnologie dell’informazione) che possono facilitare l’attività matematica e nel conoscerne i limiti.

Il progetto PISA non vuole sviluppare prove che valutino individualmente le sopracitate competenze. Fra tali competenze, infatti, esiste una considerevole sovrapposizione e, quando ci si serve della matematica, è generalmente necessario attingere simultaneamente a molte di queste competenze. Qualsiasi sforzo di valutare competenze individuali, quindi, porterebbe a quesiti artificiali e a una suddivisione inutile dell’ambito della competenza matematica. Le particolari competenze che ciascuno studente sarà in grado di mostrare varieranno considerevolmente da individuo a individuo. Ciò è in parte dovuto al fatto che tutto l’apprendimento avviene attraverso l’esperienza “con la costruzione della conoscenza individuale che si verifica attraverso i processi di interazione, negoziazione e collaborazione” (De Corte, Greer & Verschaffel, 1996, p. 510). Il progetto OCSE/PISA parte dal presupposto che la maggior parte della matematica conosciuta dagli studenti sia appresa a scuola. La comprensione di un ambito è acquisita gradualmente. Modi più formali e astratti di rappresentazione e ragionamento emergono con il tempo come conseguenza di un impegno attivo in attività designate per aiutare lo sviluppo di idee informali. La competenza matematica viene anche acquisita attraverso esperienze che comprendono interazioni in una molteplicità di situazioni o contesti sociali. Per descrivere e presentare in modo produttivo le capacità degli studenti, come anche i loro punti di forza e di debolezza in una prospettiva internazionale, è necessaria una qualche schematizzazione. Un modo per strutturare il discorso in modo comprensibile e maneggevole consiste nel descrivere raggruppamenti di competenze (*clusters of competencies*), basati sui tipi di richieste cognitive che sono necessarie per risolvere diversi problemi matematici.

### ***I raggruppamenti di competenze***

Il progetto PISA ha scelto di dividere le competenze e i processi cognitivi che esse mettono in gioco in tre diversi raggruppamenti: il raggruppamento della *riproduzione*, quello delle *connessioni* e quello della *riflessione*. Nei

paragrafi che seguono si descrivono tali raggruppamenti e il modo in cui ciascuna competenza è messa in gioco all'interno di ciascuno di essi.

### ***Il raggruppamento della riproduzione***

Le competenze che rientrano in questo raggruppamento consistono nella riproduzione di conoscenze note e comprendono quelle più comunemente usate negli accertamenti standardizzati e nelle verifiche scolastiche. Tali competenze sono la conoscenza di dati di fatto e di rappresentazioni di problemi comuni, l'identificazione di equivalenze, il ricordo di argomenti e proprietà matematiche note, l'esecuzione di procedure di routine, l'applicazione di algoritmi standard e di abilità tecniche, la manipolazione di espressioni con simboli e formule standard e l'esecuzione di calcoli.

1. *Pensiero e ragionamento.* Questa competenza consiste: nel formulare domande di base (“Quanti sono?”, “Quanto fa...?”) e nel comprendere le rispettive risposte (“Sono tanti...” “Fa tot...”); nel distinguere tra definizioni ed asserzioni; nel comprendere e manipolare concetti matematici nel tipo di contesto in cui sono stati originariamente introdotti o in cui sono stati successivamente esercitati.
2. *Argomentazione.* Questa competenza consiste nel seguire e nel motivare processi quantitativi standard (compresi processi di calcolo), affermazioni e risultati.
3. *Comunicazione.* Questa competenza consiste nel comprendere e nell'esprimersi, in forma orale e scritta, su semplici questioni matematiche, quali assegnare un nome e riconoscere le proprietà fondamentali di oggetti familiari, citare calcoli e risultati, solitamente in un'unica direzione.
4. *Modellizzazione.* Questa competenza consiste: nel riconoscere, richiamare alla mente, attivare e sfruttare modelli conosciuti e ben strutturati; nell'interpretare i modelli matematici in termini di “realtà” e viceversa; nel comunicare ad altri in modo semplice i risultati del modello.
5. *Formulazione e risoluzione di problemi.* Questa competenza consiste nel porre e formulare problemi matematici riconoscendo e riproducendo in forma chiusa problemi standard conosciuti, puri o applicati, e nel risolvere, solitamente in un'unica direzione, tali problemi ricorrendo ad approcci e procedure standard.
6. *Rappresentazione.* Questa competenza consiste nel decodificare, codificare e interpretare rappresentazioni standard, conosciute e sperimentate, di oggetti matematici ben noti. Il passare da una forma di rappresentazione a un'altra entra in gioco solo nel caso in cui tale passaggio sia parte integrante della rappresentazione stessa.
7. *Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni.* Questa competenza consiste: nel decodificare e interpretare un linguaggio simbolico e formale semplice e consueto in contesti e situazioni conosciute; nel lavorare con semplici enunciati ed espressioni che contengono simboli e formule; e nell'usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli con procedure di routine.
8. *Uso di sussidi e strumenti.* Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti in contesti, situazioni e modi simili a quelli nei quali essi sono solitamente introdotti e usati. I quesiti che accertano le competenze che rientrano in questo raggruppamento potrebbero essere definiti con i seguenti descrittori: riproduzione di materiale già conosciuto ed esecuzione di operazioni di routine.

### ***Il raggruppamento delle connessioni***

Le competenze del raggruppamento delle *connessioni* presuppongono le competenze della *riproduzione* in quanto estendono l'attività di soluzione di problemi a situazioni che non sono di semplice routine, ma che chiamano in causa ambiti comunque familiari o semi-familiari. Esse possono essere descritte come segue:

1. *Pensiero e ragionamento.* Questa competenza consiste nel formulare domande (“Come trovo?”, “A quale matematica devo ricorrere per...?”) e nel comprendere le relative risposte (che sono fornite per mezzo di tabelle, grafici, espressioni algebriche, figure ecc.), nel distinguere tra definizioni ed asserzioni e fra diversi tipi di asserzione, nel comprendere e manipolare concetti matematici in contesti un po' diversi da quelli in cui sono stati originariamente introdotti o nei quali sono stati successivamente esercitati.
2. *Argomentazione.* Questa competenza consiste nel formulare semplici ragionamenti a carattere matematico senza distinguere fra dimostrazioni e forme più articolate di argomentazione o di ragionamento, nel seguire catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità; nell'avere un'idea dell'euristica (“Che cosa può o non può accadere? E perché?”, “Che cosa sappiamo e che cosa vogliamo ottenere?”).
3. *Comunicazione.* Questa competenza consiste nel comprendere e nell'esprimersi, in forma orale e scritta, su questioni matematiche, dall'assegnare un nome e riconoscere le proprietà fondamentali di oggetti familiari, allo spiegare calcoli e risultati (solitamente in più di una direzione), all'illustrare problemi che

comprendono relazioni. Infine tale competenza comporta anche la comprensione di enunciati scritti o orali emessi da altre persone riguardanti tali problemi.

4. *Modellizzazione*. Questa competenza consiste nella strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata, nel tradurre “la realtà” in strutture matematiche all’interno di contesti che, pur non essendo eccessivamente complessi, sono comunque diversi da quelli ai quali gli studenti sono abituati. Essa consiste, inoltre, nell’interpretare modelli e risultati matematici in termini di “realtà”, e viceversa, nonché aspetti di comunicazione del modello e dei suoi risultati.
5. *Formulazione e risoluzione di problemi*. Questa competenza consiste nel porre e formulare problemi matematici andando oltre la riproduzione in forma chiusa di problemi standard conosciuti puri o applicati, nel risolvere tali problemi usando approcci e procedure standard, ma anche processi originali di problem solving che uniscono aree diverse della matematica e differenti metodi di rappresentazione e comunicazione (schemi, tabelle, grafici, parole e figure).
6. *Rappresentazione*. Questa competenza consiste nel decodificare, codificare e interpretare rappresentazioni conosciute o meno conosciute di oggetti matematici, nello scegliere e passare da una forma di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche a un’altra, nel tradurre e distinguere fra diverse forme di rappresentazione.
7. *Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni*. Questa competenza consiste nel decodificare e interpretare un linguaggio simbolico e formale all’interno di contesti e situazioni meno conosciuti, nel lavorare con enunciati ed espressioni che contengono simboli e formule e nell’usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli con procedure note.
8. *Uso di sussidi e strumenti*. Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti in contesti, situazioni e modi diversi da quelli nei quali essi sono stati introdotti e usati.

I quesiti che rientrano in questa classe di competenze generalmente richiedono che si dimostri di saper integrare e mettere in connessione elementi che fanno parte di varie idee chiave, o dei diversi filoni curricolari della matematica, oppure di saper collegare diverse rappresentazioni di un problema. I quesiti che accertano le competenze del raggruppamento delle *connessioni* potrebbero essere definiti dai seguenti descrittori: integrazione, connessione e un qualche ampliamento di materiali già conosciuti.

### ***Il raggruppamento della riflessione***

Le competenze di questo raggruppamento richiedono un elemento di riflessione da parte degli studenti sui processi richiesti o utilizzati per risolvere un problema. Esse sono legate all’abilità degli studenti di pianificare strategie di soluzione e di applicarle affrontando ambiti problematici più complessi e meno familiari rispetto a quelli del raggruppamento delle *connessioni*. Oltre alle competenze descritte nei paragrafi precedenti, il raggruppamento della *riflessione* comprende le seguenti competenze:

1. *Pensiero e ragionamento*. Questa competenza consiste nel formulare domande (“Come trovo?”, “A quale matematica devo ricorrere per...?”), “Quali sono gli aspetti essenziali di questo problema o situazione?”) e nel comprendere i corrispondenti tipi di risposte (fornite per mezzo di tabelle, grafici, espressioni algebriche, figure, specifiche di punti chiave, ecc.), nel distinguere tra definizioni, teoremi, congetture, ipotesi e affermazioni che riguardano casi particolari e nel riflettere su tali distinzioni o nell’articolarle, nel comprendere e manipolare concetti matematici in contesti nuovi o complessi, nel comprendere e manipolare la portata e i limiti di determinati concetti matematici e nel generalizzare i risultati.
2. *Argomentazione*. Questa competenza consiste nel formulare semplici ragionamenti di carattere matematico distinguendo fra dimostrazioni e forme più articolate di argomentazione o di ragionamento, nel creare catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità; nel far ricorso all’euristica (“Che cosa può o non può accadere?”, “Quale può essere il caso? E perché?”, “Che cosa sappiamo e che cosa vogliamo ottenere?”, “Quali fra le proprietà sono essenziali?”, “In che relazione si pongono gli oggetti?”).
3. *Comunicazione*. Questa competenza consiste nel comprendere enunciati e nel sapersi esprimere, in forma orale e scritta, su questioni di carattere matematico, che vanno dal semplice assegnare un nome e riconoscere le proprietà fondamentali di oggetti noti, allo spiegare calcoli e risultati (solitamente in più di una direzione) fino all’illustrare problemi caratterizzati da relazioni complesse, comprese relazioni logiche. Infine tale competenza comporta anche la comprensione di enunciati scritti o orali emessi da altre persone e riguardanti tali problemi.
4. *Modellizzazione*. Questa competenza consiste nella strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata, nel tradurre “la realtà” in strutture matematiche all’interno di contesti che potrebbero essere complessi o molto diversi da quelli ai quali gli studenti sono abituati, nell’interpretare modelli e risultati matematici in termini di “realtà”, e viceversa, nonché aspetti di comunicazione dei

risultati del modello (raccolgere informazioni e dati, monitorare il processo di modellizzazione e validare il modello risultante dal processo stesso). Tale competenza comprende inoltre il riflettere, analizzando, il criticare e l'impegnarsi in comunicazioni più complesse riguardanti i modelli e la modellizzazione.

5. *Formulazione e risoluzione di problemi.* Questa competenza consiste nel porre e formulare problemi matematici in un modo che vada ben oltre la riproduzione in forma chiusa di problemi standard conosciuti puri o applicati, nel risolvere tali problemi ricorrendo ad approcci e procedure standard o a processi originali di problem solving che uniscano aree diverse della matematica e differenti metodi di rappresentazione e comunicazione (schemi, tabelle, grafici, parole e figure). Essa, inoltre, implica una riflessione sulle strategie e sulle soluzioni.
6. *Rappresentazione.* Questa competenza consiste nel decodificare, codificare e interpretare rappresentazioni note o meno note di oggetti matematici, nello scegliere e passare da una forma di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche a un'altra, nel tradurre e distinguere fra diverse forme di rappresentazione. Essa implica inoltre una combinazione creativa di rappresentazioni differenti e la creazione di rappresentazioni originali.
7. *Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni.* Questa competenza consiste nel decodificare e interpretare un linguaggio simbolico e formale in contesti e situazioni sconosciute, nel lavorare con enunciati ed espressioni che contengono simboli e formule e nell'usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli. Essa implica inoltre la capacità di affrontare enunciati e termini complessi e un linguaggio simbolico o formale cui non si è abituati e nel tradurre in linguaggio naturale il linguaggio simbolico/formale.
8. *Uso di sussidi e strumenti.* Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare sussidi e strumenti, conosciuti o meno, in contesti, situazioni e modi assai diversi da quelli nei quali essi sono solitamente introdotti e usati. Essa implica inoltre la conoscenza dei limiti di tali sussidi e strumenti.

I quesiti che accertano le competenze del raggruppamento della *riflessione* potrebbero essere definiti dai seguenti descrittori: ragionamento avanzato, argomentazione, astrazione, generalizzazione e modellizzazione applicate a nuovi contesti.

Pagg 57 e seguenti

**Presentazione dei livelli di competenza matematica** Per presentare i risultati delle prove di PISA verrà messa a punto una scala di competenza a cinque livelli (Masters e Forster, 1996; Masters, Adams e Wilson, 1999). La scala sarà messa a punto con procedure statistiche usando l'approccio dell'Item Response Modelling per costruire una scala di misura con dati di tipo ordinale. La scala complessiva sarà usata per descrivere le prestazioni in relazione a cinque livelli di abilità e permetterà di classificare i Paesi in base a tali livelli, fornendo così un quadro di riferimento per il confronto internazionale. Si considererà la possibilità di costruire diverse scale indipendenti per la presentazione dei risultati. Tali scale potrebbero essere basate sui tre raggruppamenti di competenze o sulle quattro idee chiave. La costruzione di tali scale verrà decisa sulla base di diverse considerazioni, tra cui vi sono l'analisi dei parametri psicometrici delle prove che sarà condotta nel corso dell'analisi dei dati di PISA. Per rendere possibile la costruzione di diverse scale, è necessario che le prove di PISA comprendano un numero sufficiente di quesiti per ciascuna delle possibili categorie di presentazione dei risultati. Inoltre, i quesiti all'interno di ciascuna categoria dovranno coprire una gamma di difficoltà sufficientemente ampia. I raggruppamenti di competenza descritti precedentemente nel quadro di riferimento riflettono categorie concettuali di complessità crescente, ma non una gerarchia di prestazioni degli studenti basata sulla difficoltà dei quesiti. La complessità concettuale rappresenta solo una delle componenti della difficoltà dei quesiti che influisce sul livello delle prestazioni. Altre componenti sono la familiarità del problema, le opportunità recenti di apprendimento e di esercizio e così via. Quindi un quesito a scelta multipla che mette in gioco competenze del raggruppamento della *riproduzione* (per esempio la domanda "quale tra i seguenti è un parallelepipedo rettangolo?" seguita dalle figure di una palla, di una lattina, di una scatola e di una piazza) può risultare molto facile per studenti a cui è stato insegnato il significato di tali termini, ma molto difficile per altri a causa della mancanza di familiarità con la terminologia usata. Anche se è possibile immaginare quesiti relativamente difficili del raggruppamento della *riproduzione* e quesiti relativamente facili del raggruppamento della *riflessione*, e per quanto sia possibile quesiti di difficoltà variabile per ciascun raggruppamento, ci si aspetta una relazione grosso modo positiva tra i raggruppamenti di competenze e la difficoltà dei quesiti. Tra i fattori sottesi ai crescenti livelli di difficoltà del quesito e di competenza matematica vi sono i seguenti:

- Il tipo e il grado di interpretazione e di ragionamento richiesti. Questo aspetto comprende la natura della richiesta di interpretazione che deriva dal contesto del problema; la misura in cui i procedimenti matematici richiesti per risolvere il problema sono forniti esplicitamente o devono essere ricostruiti dallo studente; e la misura in cui sono richiesti *insight*, ragionamenti complessi e generalizzazioni.

- Il tipo di capacità di rappresentazione che sono necessarie, spaziando da problemi dove è usato solo un metodo di rappresentazione a problemi nei quali gli studenti devono passare tra diversi metodi oppure trovare essi stessi quelli appropriati.
- Il tipo e il livello di capacità matematiche richieste. Per questo aspetto si spazia da problemi con un unico passaggio (*single-step problems*) che richiedono la riproduzione di elementi matematici di base e l'esecuzione di semplici processi di calcolo fino a problemi con molti passaggi (*multi-step problems*) che richiedono conoscenze matematiche più complesse e abilità complesse di decisione, di elaborazione cognitiva, di analisi e soluzione di problemi e di modellizzazione.
- Il tipo e il grado di argomentazione matematica che è richiesta, andando da problemi dove non è richiesto alcun tipo di argomentazione, a problemi in cui gli studenti possono dover applicare argomentazioni matematiche note, fino a problemi dove gli studenti devono creare loro stessi argomentazioni matematiche o comprendere quelle di altre persone o giudicare la correttezza di determinati argomenti o dimostrazioni.

Al livello più basso di competenza descritto, gli studenti portano a termine processi con un unico passaggio che implicano il riconoscimento di contesti familiari e problemi matematicamente ben formulati, utilizzando nozioni e processi matematici molto noti e applicando semplici abilità di calcolo. A un successivo livello di competenza, gli studenti portano a termine compiti più complessi che richiedono un'elaborazione a più passaggi e si basano sul collegamento di più informazioni o sull'interpretazione di diverse rappresentazioni di concetti o informazioni matematiche, riconoscendo quali elementi sono pertinenti e rilevanti e come si collegano uno all'altro. A questo livello essi lavorano con modelli o formulazioni date, spesso in forma algebrica, per individuare soluzioni, o portano a termine brevi sequenze di processi o passaggi di calcolo per arrivare a una soluzione. Al livello di competenza più alto, gli studenti assumono un ruolo più creativo e attivo nel loro approccio ai problemi matematici. Interpretano informazioni più complesse e trattano più passaggi di elaborazione. A questo livello gli studenti formulano il problema e spesso sviluppano un modello adeguato che ne favorisce la soluzione. Essi individuano e applicano strumenti e conoscenze pertinenti spesso in un contesto problematico poco familiare, dimostrano intuizione nell'individuare una strategia di soluzione appropriata e mostrano processi cognitivi di ordine superiore quali la generalizzazione, il ragionamento e l'argomentazione nella spiegazione o comunicazione dei risultati.