Le prove INValSI e la valutazione in matematica

Gloria Balboni, Anna M. Benini, Bruno D'Amore, Martha I. Fandiño Pinilla, Giorgio Gabellini, Grazia Grassi, Aurelia Orlandoni

Si è formato a Bologna nel 2004 un gruppo di lavoro (ValerMath: Valutazione Emilia Romagna in Matematica) formato da:

- prof.ssa Anna Maria Benini, dirigente tecnica dell'USR ER,
- prof. Bruno D'Amore, docente universitario, in funzione di coordinatore,
- prof.ssa Aurelia Orlandoni, docente ricercatrice dell'IRRE/ER,
- prof.ssa Martha Isabel Fandiño Pinilla, docente universitaria a contratto, in qualità di "esperta di valutazione in Matematica",
- tre insegnanti esperti di scuola:
    - dr. Giorgio Gabellini per la Scuola Primaria, docente universitario a contratto
    - prof.sse Gloria Balboni e Anna Cristina Canella per la Scuola Secondaria di I grado,
    - prof.ssa Grazia Grassi per la Scuola Secondaria di II grado, SVT presso la SSIS.

Tale gruppo ha lavorato sotto l'egida dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna, per vagliare, esaminare, sottoporre a verifiche da parte di docenti attivi, sensibili e critici, le prove INValSI, per quanto concerne la MATEMATICA.

I risultati delle analisi effettuate dal gruppo, collegialmente, sono stati affidati a quattro dei componenti, gli ultimi che appaiono nel precedente elenco.

Lo scopo di tale analisi è costruttivo: si vogliono discutere i punti deboli ed i punti forti dell'attività INValSI allo scopo di migliorare il rapporto tra tali prove e gli insegnanti che le accolgono nelle loro classi, dando a questi ultimi delle chiavi di lettura propositive.

Una raccomandazione che è fortemente emersa consiste nel suggerire a chi tali prove confeziona ed agli insegnanti militanti, lo studio o, per lo meno, la considerazione dei contributi che da oltre 20 anni dà la Didattica della Matematica ai processi di insegnamento-apprendimento. Pare infatti che questa disciplina sia purtroppo quasi ignorata, come fosse inesistente, e questa ci pare una delle cause dell'apparente inconsistenza di alcune prove e dei risultati riscontrati nelle aule.

Una riflessione sulla valutazione in Matematica a partire dalle prove INValSI [1]

Martha I. Fandiño Pinilla

NRD- Dipartimento di Matematica – Università di Bologna
Alta Scuola Pedagogica – Locarno - Svizzera

Quelle che seguono sono alcune riflessioni che, spero, potranno aiutare qualche insegnante a vedere le prove, qualsiasi prova, in un modo positivo. Ho una certa esperienza di prove nazionali di questo tipo, maturata nel mio Paese di origine e ad essa implicitamente mi riferisco in questa breve trattazione.

1. La problematicità della questione

1.1. La valutazione in Matematica, da parte di un insegnante, degli apprendimenti dei propri allievi ha principalmente tre macro obiettivi (Fandiño Pinilla, 2002):
a) misurare l'efficacia della propria azione didattica
b) misurare l'opportunità della scelta di un dato segmento curricolare
c) misurare lo stato cognitivo di ogni singolo allievo.
La misura indicata in a) permette di trarre giudizi sulle funzionalità delle scelte metodologiche (ingegneria didattica, D'Amore, 1999a).
La misura b) permette di trarre giudizi sulla efficacia della trasposizione didattica (D'Amore, 1999a).
La misura c) permette di trarre indicazioni sul passaggio da "sapere insegnato" a "sapere appreso" e dunque sulla congruenza tra "curricolo auspicato" e "curricolo effettivo" (Fandiño Pinilla, 2002).
Ciascuno di questi punti è problematico e la Didattica della Matematica lo ha evidenziato in modi specifici. Per esempio, per quanto concerne il punto c), è ben nota l'esistenza di "curricoli sommersi" che sono spesso assai più *effettivi* di quelli "auspicati".

1.2. Vi sono dei limiti ad una valutazione effettuata dall'insegnante di classe:
uso di metodologie attese (da parte dell'insegnante)
comportamento secondo copioni standard da parte dell'allievo (contratto didattico, D'Amore, 1999a)
uso in aula di linguaggio condiviso che spesso già di per sé comporta risposte standard
attese reciproche che influenzano le risposte e le loro interpretazioni
…

1.3. Se una valutazione non è fatta dall'insegnante di classe, ma dall'esterno, questi limiti cadono, ma si aprono nuove possibili (ma quasi certe) complicazioni:
smarrimento dello studente che non riconosce le metodologie usuali
incapacità di gestire situazioni non abituali
scontro con un linguaggio non usuale
non riconoscimento degli obiettivi della valutazione
non riconoscimento del senso delle richieste
incongruenza tra gli apprendimenti raggiunti e la richiesta

[1] Lavoro eseguito sotto gli auspici dell'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia – Romagna.

aumento delle interferenze emotive in presenza di valutatori esterni alla classe o alla scuola
…

1.4. Vi sono poi, in ogni caso, due macro destinazioni della valutazione in Matematica:
valutazione di conoscenze
valutazione di competenze.
Allo scopo di spiegare questa differenza (D'Amore, Godino e altri, 2003), vorrei fare l'analogo che alcuni Autori fanno per spiegare la differenza tra *frame* e *script* (D'Amore, 1999a); essi non rappresentano la stessa idea, essendo il *frame* più legato all'immagine statica (si usa dire "fotografia") e lo *script* all'immagine dinamica in evoluzione (si usa fare qui riferimento ad un processo, ad una sequenza di fotografie, c'è chi parla di "film" come, d'altra parte, l'idea di *script* evoca).
La conoscenza "fotografa" situazioni statiche; in un certo senso, questa valutazione *può* dunque essere effettuata tramite un test di controllo, dall'insegnante o dall'esterno. Un risultato deviante rispetto a quello auspicato dimostra solo che non c'è congruenza tra quanto era atteso o auspicato e quanto è stato di fatto ottenuto.
La competenza, che ha avuto negli ultimi 20 anni "definizioni" assai diverse, non è ricavabile da una "fotografia" perché implica un processo; sembrano essere due le caratteristiche su cui le diverse interpretazioni si accordano:
a) il suo carattere di dinamicità
b) il coinvolgimento di questioni cosiddette "affettive", come la "volizione".
Ciò comporta che ogni artificio messo in campo per valutare con una prova non iterata nel tempo una competenza sia destinato al fallimento.

1.5. Esistono due macro categorie di competenza per quanto riguarda la matematica (D'Amore, Godino ed altri, 2003):
una competenza in matematica (endogena)
una competenza matematica (esogena).
La prima è descritta da situazioni di evoluzione dinamica ed affettiva all'interno della disciplina stessa.
La seconda necessita di più sottili occasioni interculturali, nelle quali lo studente deve "usare" la propria competenza in matematica per interpretare situazioni diverse.

1.6. Va da sé che: con un test standard *non* è possibile valutare competenze in matematica, né tanto meno competenze matematiche.

1.7. C'è un punto sul quale tutti i ricercatori concordano e cioè la necessità della implicazione personale dello studente nella costruzione della propria conoscenza (e, ovviamente, a maggior ragione, della propria competenza).
È ben nota oramai a chiunque abbia a che fare con la Didattica della Matematica la "teoria delle situazioni" di Guy Brousseau, almeno nelle sue linee essenziali (D'Amore, 1999a).
Questa teoria ci insegna, tra l'altro, che le situazioni di apprendimento efficaci sono le situazioni adidattiche (alle quali si affidano i traguardi cognitivi più importanti, per esempio quelli che costituiscono i nuclei tematici imprescindibili o fondanti per le discipline; c'è chi li chiama "nuclei epistemologici"). Una delle caratterizzazioni fondanti delle situazioni adidattiche è il doppio processo di devoluzione/implicazione che vede in azione prima l'insegnante sull'allievo (motivazione, affidamento del traguardo cognitivo da costruire) e poi lo studente su sé stesso (volizione, accettazione, determinazione) (D'Amore, 1999a).
Senza l'implicazione non c'è alcuna possibilità di buon funzionamento del processo di apprendimento; l'implicazione personale dello studente, infatti, è assolutamente necessaria al buono

svolgimento di una situazione adidattica. Lo scopo di una situazione adidattica è la costruzione di conoscenza, ma senza l'implicazione personale non si ha situazione adidattica.
Dunque, l'implicazione personale è necessaria per la costruzione di conoscenza (e, a maggior ragione, di competenza).
Sappiamo che la mancanza di implicazione è stata segnalata come causa fondamentale del processo di scolarizzazione, assolutamente deleterio per l'apprendimento (D'Amore, 1999b); è stato anche segnalato dalla letteratura che tale processo ha inizio fin dalla Scuola Primaria. Afferma D'Amore: «Con il termine "scolarizzazione del sapere" intendo qui riferirmi a quell'atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l'allievo, ad un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della Scuola Elementare), delega alla Scuola (come istituzione) ed all'insegnante di scuola (come rappresentante dell'istituzione) il compito di *selezionare per lui i saperi significativi* (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato della noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione,…). Poiché questa scolarizzazione comporta il riconoscimento dell'insegnante come depositario dei saperi che socialmente contano, è anche ovvio che vi è, più o meno contemporaneamente, una scolarizzazione dei rapporti interpersonali (tra studente ed insegnante e tra studente e compagni) e del rapporto tra lo studente ed il sapere: è quel che nel titolo si chiama "scolarizzazione delle relazioni"». In questo ed in altri lavori D'Amore analizza a fondo le implicazioni deleterie che la scolarizzazione comporta in aula, nel processo di apprendimento e mostra come la richiesta di devoluzione da parte dell'insegnante, seguita dall'accettazione dell'implicazione da parte dell'allievo risolvano il problema (a qualsiasi livello scolastico).

1.8. La verifica di un apprendimento, pertanto, ha una radice significativa in una situazione in cui l'implicazione è avvenuta. Altrimenti il risultato ottenuto con tale verifica potrà al più servire a misurare la minore o maggior distanza tra le risposte auspicate e le risposte ottenute, non la qualità dell'apprendimento (che servirebbe invece alle successive azioni didattiche di recupero).

1.9. Lo studio del complesso meccanismo della valutazione in Matematica in tutte le sue sfaccettature è studiato da decenni da specialisti e non è dunque qui il caso di entrare in dettagli, anche perché non è questo il tema.
Voglio solo far notare che, quando si dice "apprendimento" in Matematica, oramai ci si indirizza in almeno queste quattro direzioni:
1) apprendimento dei concetti (noetica)
2) apprendimento di algoritmi
3) apprendimento di strategie (es. la risoluzione di problemi)
4) apprendimento comunicativo (es. la validazione, l'argomentazione, la dimostrazione).
Esse non sono riconducibili l'una all'altra, anche se non sono del tutto indipendenti.

1.10. Tuttavia, la ricerca ha ben messo in evidenza che ci sono apprendimenti "trasversali" a tutti questi, assolutamente necessari. Tra gli esempi possibili, a questo punto, privilegio ed evidenzio uno dei più dibattuti, che richiederebbe ben altro spazio: il dominio semiotico dei registri rappresentativi in cui avvengono:
1) la descrizione dei concetti (per esempio la loro definizione)
2) la simbolizzazione dell'apparato algoritmico senza il quale è impossibile riprodurre e generalizzare procedure
3) la esplicitazione e la messa in campo delle strategie
4) la trasformazione di un modello interno in un modello esterno in situazioni comunicative
…

1.11. Insegnanti non preparati in Didattica della Matematica non considerano importanti le questioni che sto trattando qui, dato che ritengono esistere rimedi ad hoc per ogni situazione fallimentare di apprendimento, pur senza aver effettuato sistematiche ricerche empiriche. Ecco di seguito una rapida carrellata di esempi.
Sono diffuse ingenue illusioni, come nella scuola media quella secondo la quale il disegno "aiuta" nella risoluzione dei problemi, che sono state fortemente messe in crisi. Si è ampiamente visto, grazie a ricerche specifiche, come il linguaggio del disegno, con le sue caratteristiche sintassi, semantica e pragmatica, possa entrare in collisione sia con il linguaggio naturale, sia con il linguaggio algebrico ed aritmetico, creando ulteriori difficoltà a chi ne ha già; la comprensione di una pluralità di registri semiotici pone sempre problemi interpretativi e deve essere oggetto di una didattica esplicita.
Altra ingenua illusione è quella assai diffusa nella Scuola Primaria, secondo la quale esistono strumenti preconfezionati in cui avvengono apprendimenti reali. La ricerca chiama tali apprendimenti "situati" o "artificiali": essi, infatti, sono situati solo nel contesto di apprendimento preconfezionato e non sono spontaneamente generalizzabili né trasferibili ad altri settori; sono inoltre artificiali cioè strettamente connessi alla minisituazione didattica creata artificialmente.
L'idea-speranza, tipica degli anni '60-'70 inizio '80, che tali apprendimenti fossero spontaneamente generalizzati con un transfer cognitivo autonomo ad altre situazioni di apprendimento, è stata radicalmente falsificata; è stato ampiamente mostrato come *ogni* apprendimento è situato e come il transfer cognitivo non sia automatico, ma frutto di didattiche specifiche. Chi effettua apprendimenti specifici in situazioni artificiali si limita ad apprendere quelle particolari "regole del gioco" ma non costruisce necessariamente conoscenza.
Altra ingenua illusione, dovunque diffusa, è quella secondo la quale la ripetizione di un esercizio o la classificazione di situazioni problematiche in elenchi di casi possibili, aiuti e fortifichi nell'apprendimento. Ciò è stato contraddetto; al più, si tratta di fortificare un addestramento, non di creare apprendimento, dato che la ripetizione dell'esercizio avviene nella zona effettiva di Vygotskij e non in quella prossimale.

1.12. Dunque, una verifica degli apprendimenti (anche solo di conoscenze, senza la pretesa di arrivare alle competenze) sembra essere un piano di analisi specifica, necessaria, ma problematica e complessa:
problematica perché priva di definizioni standard onnicomprensive riducibili ad un comportamento che non ammetta devianze o diverse interpretazioni
complessa perché chiama in causa una notevole molteplicità di fattori.

1.13. Ciò detto, tuttavia, accettiamo che una società decida, visto che ne ha tutto il diritto, di valutare attraverso un test i propri giovani cittadini in quanto concerne le loro conoscenze (perché, abbiamo visto, la valutazione delle competenze tramite una "fotografia statica" è un traguardo illusorio) (D'Amore, Godino ed altri, 2003).

2. La società valuta i propri giovani su conoscenze disciplinari

2.1. La prima cosa che ci si chiede è:
qual è lo scopo di tale valutazione?
A parte quanto dichiarato in forma ufficiale, è ovvio che un tale impegno di energie deve tendere ad un solo obiettivo: migliorare la qualità delle conoscenza degli allievi, futuri cittadini.
Questo obiettivo si raggiunge non limitandosi ad una verifica statistica del rapporto tra riposte azzeccate / non azzeccate, ma potenziando un processo di miglioramento didattico che mostri agli insegnanti le lacune, le divergenze, le discrasie tra risultati attesi dalla società e risultati ottenuti.
Affinché dunque sia lecito pensare che la valutazione delle conoscenze tramite test porti all'obiettivo detto, la società dovrebbe:

aver predeterminato quali sono i risultati attesi
comunicarli agli insegnanti
far sì che essi operino per tale raggiungimento
e poi, dopo le prove:
mostrare le divergenze
spiegarne i motivi
suggerire modifiche all'azione didattica
lasciare tempo per l'effettuazione di ulteriori attività didattiche
ripetere le prove
e così via, in un processo circolare.

2.2. Come i risultati delle prove possono comunicare agli insegnanti le divergenze tra risultati attesi dalla società e risultati ottenuti?
Non c'è che una risposta proponibile:
la società, nel proporre delle prove, dovrebbe chiarire in forma esplicita quali sono le motivazioni specifiche di ciascuna di esse.
In modo più esplicito.
L'insegnante I verifica che i suoi allievi A hanno risposto alla domanda D in maniera divergente da quella auspicata, con uno scarto significativo.
I potrebbe allora decidere di far esercitare A su D, fino ad ottenere la risposta voluta.
Ma noi sappiamo, dalla ricerca didattica moderna, che ogni apprendimento è "situato"; dunque, dopo l'esercitazione, gli studenti A sanno rispondere a D, ma non hanno necessariamente aumentato la loro conoscenza.
Nel caso in cui la società sottoponesse nuovamente A ad una prova D' (che, secondo la società, condivide con D il senso conoscitivo), non è affatto detto che A risponderebbe a D' secondo le attese della società; potrebbero ancora aversi risposte devianti.
Per avere con certezza un aumento di conoscenza ed una prestazione buona su D', occorrerebbe che I sapesse e condividesse quali erano:
a) gli obiettivi culturali, di conoscenza matematica per cui era stata proposta D
b) gli obiettivi didattici per cui D era stata proposta.
Con queste informazioni, I può modificare la propria azione didattica su A, in maniera più significativa e produttiva.
La somma di esperienze su singoli esercizi, è stato provato, non solo non determina aumento di conoscenza, ma può portare al risultato contrario, frantumando cioè una possibile costruzione di conoscenza in una ricerca improduttiva di casistica.
Dunque, per costruire conoscenza, l'insegnante deve decidere di operare didatticamente sul SENSO delle cose e non sulla loro apparenza.

2.3. Prima di concludere, evidenzio nuovamente un punto che è centrale per un'operazione di valutazione da parte della società di appartenenza, la condivisione, cioè, con gli insegnanti di scopi, obiettivi, contenuti, metodi di controllo e misure di deviazione. Se l'insegnante non è reso *parte attiva* di questo processo, ovviamente tenderà a considerare la valutazione fatta sui propri allievi come una valutazione fatta su di sé e sulla propria azione didattica. Scatterà così un comprensibile tentativo di difesa, di giustificazione, che nulla ha di professionale, la cui origine sta nell'estraneità della proposta rispetto all'azione quotidiana del suo insegnare.

Riferimenti bibliografici minimi

Per la terminologia didattica:
D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [IX ediz. 2005].

Sulle competenze:
D'Amore B., Godino J.D., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Una rassegna abbastanza recente sulla valutazione in matematica:
Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Sul fenomeno della "scolarizzazione":
D'Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

Valutazione delle conoscenze e delle abilità nella Scuola Primaria

Giorgio Gabellini

RSDDM Bologna
Università di Urbino

Premessa

Con il presente contributo si intende riflettere su "La Valutazione degli apprendimenti" e la connessa procedura di rilevazione, prevista dall'art. 3 della Legge delega 53/2003 ed affidata all'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema di Istruzione (INValSI). Verranno prese in considerazione le sole prove di matematica destinate alla Scuola Primaria limitando l'attenzione agli anni 2003/04 (Progetto Pilota 3) e 2004/05. Le prove di questo ultimo anno scolastico hanno aperto la fase a regime della valutazione nazionale e come tale hanno coinvolto, relativamente alle classi interessate, l'intera popolazione scolastica.

L'ormai quadriennale esperienza crediamo possa consentire una riflessione sul molto materiale proposto alle scuole, sulla normativa che lo ha accompagnato, sulle dichiarazioni di intenti che lo ha preceduto, sull'analisi che l'INValSI ha prodotto e reso pubblica in questi anni.

Un limite oggettivamente forte a questo nostro intento è rappresentato dalla **carenza** di dati complessivi e comparati sugli esiti delle prove sostenute dagli alunni, sia a livello nazionale sia per macroaree geografiche o per singole regioni: il sito dell'INValSI è, per quanto abbiamo potuto vedere, avaro di dati e quindi difficilmente consente di associare l'analisi a priori delle singole prove con gli esiti che le stesse hanno fornito. La nostra analisi è quindi costretta a muoversi con molta cautela ogni qual volta verranno utilizzati dati che non sembrano avere caratteristiche di ufficialità.

Il punto di vista sarà quello di un docente di Scuola Primaria che, avendo presente il suo potenziale percorso didattico in una classe seconda e in una classe quarta, cerca di porlo in rapporto alla "Valutazione degli apprendimenti" che l'INValSI ha proposto in tali classi nell'ultimo biennio.

Il progetto di valutazione nazionale: alcuni nodi problematici

Nonostante alcune sacche di resistenza, che a questo punto paiono piuttosto sterili sul piano propositivo, riteniamo che lo Stato possa (e forse debba) farsi carico di monitorare il livello degli apprendimenti che il sistema scolastico propone e che la società considera preziosa porta di accesso alle competenze intellettive e pratiche, individuali e sociali che i singoli soggetti sono chiamati a porre in campo nel corso della loro esistenza.

Un'operazione di questo genere, poco praticata in Italia, ma consolidata in molti paesi, comporta l'assunzione di responsabilità molteplici in ordine:

a) alle politiche scolastiche;
b) agli aspetti tecnici di costruzione della indagine;
c) al coinvolgimento attivo, partecipe, metodologicamente rigoroso dei destinatari;
d) alla valutazione degli esiti;
e) alle azioni di intervento a posteriore sugli esiti stessi.

In relazione ai punti sopra indicati constatiamo che sono passati nell'immaginario collettivo della componente docente alcuni messaggi, talora strumentali o strumentalizzati, ma comunque poco arginati, che hanno prodotto la sgradevole sensazione che finalmente la scuola abbia finito di vivere in regime di autoreferenzialità, ma al contempo che tutti siano iscritti nel ... "registro degli indagati". Ora va recuperato un clima favorevole all'introduzione di questa importante innovazione

non solo per ri-orientare la contestazione chiassosa, ma anche per coinvolgere più in profondità la "maggioranza silenziosa". Ciò può realizzarsi attraverso il recupero dei necessari elementi di trasparenza e, in particolare, con l'esplicitazione dei "quadri di riferimento" individuati per le discipline sottoposte ad indagine.
Quanto all'effetto di "ricaduta" che ci si aspetta dal complesso delle prove INValSI, ha risentito anch'esso della difficoltà a raccogliere l'adesione degli operatori, ancora una volta per carenza di connotati di trasparenza e di chiarezza esterna (almeno sul piano della loro percezione) nelle finalità e nei metodi. Anche in questo caso va recuperato una sinergia di intenti ed un'adesione convinta che conduca a riconoscere nelle prove INValSI un reale ed efficace strumento di supporto all'azione di insegnamento/apprendimento.

Le prove INValSI: dal *Progetto Pilota 3* alla *Rilevazione degli apprendimenti*

Molti elementi qualitativi e quantitativi accomunano le prove proposte negli anni 2003-2004, ultimo progetto pilota, e 2004-2005, avvio a regime della procedura nazionale di valutazione. La caratteristica strutturale e la consistenza numerica dei quesiti sono identiche: 16 per la classe seconda primaria con 3 opzioni di risposta; 28 per la classe quarta primaria con 4 opzioni di risposta. Il riferimento dichiarato per le due annualità di prove è esplicitamente rivolto ai medesimi contenuti: *numero* e *geometria* per la seconda primaria; *numero*, *geometria, misura* per la quarta primaria con l'aggiunta nell'anno 2004-2005 di *dati e previsioni*. L'introduzione al pensiero razionale che era presente nel 2003-2004 è stato, nell'anno successivo, riassorbito per molti aspetti all'interno degli altri temi.
L'elenco delle conoscenze ed abilità da sottoporre a valutazione non presenta nel biennio considerato variazioni di rilievo; le uniche novità sono costituite da:

- un ampliamento in ambito geometrico per cui il "*riconoscere, denominare, descrivere figure geometriche*" viene integrato con il "*classificare*";
- la soppressione del "*saper effettuare semplici conversioni tra un'unità di misura ed un'altra*" che non appare più tra gli obiettivi dell'anno 2004-2005.

La formulazione dei singoli item all'interno di ciascun test mantiene un rigoroso equilibrio tra item che chiedono l'applicazione di conoscenze matematiche a contesti di vita reale (Es.: *Quante arance ci possono essere in due chilogrammi?*) ed item che invece si situano all'interno di un contesto puramente matematico (Es: *Quale numero corrisponde a 4 decine?*); una scelta a nostro parere interessante e motivata che sottende l'esigenza di un duplice sbocco formativo in ambito matematico:

- il conseguimento di competenze matematiche;
- il conseguimento di competenze in matematica.

Ad una lettura globale e comparata delle due prove appare evidente un abbassamento del livello di difficoltà in quelle proposte nel corrente anno (2004-2005). L'indice di facilità a cui il gruppo di lavoro spesso si richiama nei documenti che illustrano le modalità di preparazione delle prove conduce le commissioni ad espungere quei test che evidentemente non hanno ottenuto i risultati attesi o si attestano troppo al di sotto della media.

Così, per esempio per la seconda primaria il **quesito 12** del 2003/2004:
Quale numero corrisponde a 14 unità e 3 decine?
□ *A. 17*
□ *B. 34*
□ *C. 44*
ha il suo corrispettivo nel meno problematico **quesito 13** del corrente anno:
Quale numero corrisponde a 2 decine e18 unità?
□ *A. 38*
□ *B. 208*

□ *C.* *218*

dove anche la scelta dei distrattori potrebbe essersi rivelata elemento facilitante.

Anche **l'item 15** del 2004-2005 ricalca fedelmente due item dell'anno precedente:
Quale segno manca nell'operazione seguente?

26 ? 9 = 17

□ *A.* +

□ *B.* -

□ *C.* ×

ma negli item del 2003-2004 i termini dell'operazione forse hanno un indice di problematicità maggiore trattandosi rispettivamente di:

0 ?16 = 16

e

19 ?19 = 38

In quarta primaria l'item che nel 2003-2004 ha conseguito il peggior risultato è il **numero 3**:
Nell'etichetta di un pacchetto di the è scritto:

64 filtri
108 grammi

Quanti grammi di the si acquistano comprando quel pacchetto?

□ *A.* *6912 g*
□ *B.* *180 g*
□ *C.* *172 g*
□ *D.* *108 g*

non solo non viene riproposto neanche sotto altra forma, ma si evitano accuratamente tutti quegli item che, come questo, richiamano prevalentemente competenze di ordine logico linguistico come per esempio **l'item 17:**
Giulio, Mattia e Silvia hanno a disposizione 3 caramelle in tutto e decidono di sceglierne una per ciascuno. Le caramelle sono una alla fragola, una al limone, una al latte. I tre bambini dicono:
Giulio: "A me non piace il limone"
Mattia: "Io non posso mangiare la caramella al latte"
Silvia: "Scelgo io quella al latte"
Di chi sarà la caramella al limone?

□ *A.* *Silvia*
□ *B.* *Mattia*
□ *C.* *Giulio*
□ *D.* *Di nessuno.*

Abbiamo già rilevato come il quadro di riferimento dichiarato e l'elencazione degli Obiettivi Specifici di Apprendimento ivi contenuto non si discostino sostanzialmente nel biennio che prendiamo in considerazione. Tuttavia non si può fare a meno di notare alcune omissioni e alcune integrazioni il cui senso sarebbe bene venisse esplicitato almeno a posteriori. Rileviamo in particolare soprattutto per la quarta primaria che le prove più recenti sembrano aver accuratamente evitato di proporre situazioni problematiche che richiedevano l'uso di moltiplicazione o divisione: ne ritroviamo infatti solo quattro a fronte delle nove dell'anno precedente.
Hanno invece maggior rilievo le frazioni, in particolare il calcolo della frazione di un intero, quando invece nel 2003-2004 l'unico item presente andava, come diremo poi, oltre gli obiettivi dichiarati.
In geometria l'attenzione sembra essersi spostata verso le figure del piano e verso una più dettagliata analisi dei loro elementi costitutivi: altezza, angoli, diagonali, perpendicolarità.

Le prove INValSI e l'azione educativa della scuola: quale coerenza?

I risultati attesi di apprendimento degli allievi crediamo coincidano con quelli che le prove INValSI vorrebbero testare. Il complesso delle prove (al di là delle critiche che si possono proporre sulla loro formulazione) non sembra rappresentare una difficoltà insormontabile per alunni di seconda e quarta primaria; quindi i risultati ottenuti pensiamo possano essere coerenti con quell'indice di variabilità di prestazione caratteristico della classi o forse, in considerazione del livello di difficoltà delle prove, addensarsi intorno al risultato medio.

D'altra parte i contenuti presi in considerazione sono coerenti con quelli che la scuola militante ha proposto e propone per lo meno a partire dal D.P.R. 104/1985 ("Programmi Didattici per la Scuola Primaria"), né le caratteristiche costitutive delle prove e le loro finalità potevano introdurre sostanziali novità pena la loro inadeguatezza.

Sul piano più strettamente formale, va osservato che alcuni elementi ed alcune costanti riscontrabili nelle prove suggeriscono e sottendono alcune preoccupazioni che il Gruppo di Lavoro sembra aver avuto presente peraltro in coerenza con il dibattito che la didattica della matematica va da anni conducendo. In particolare osserviamo che la formulazione delle domande e delle risposte può fornire alcuni feed back interessanti sul versante dei processi di insegnamento/apprendimento, spostando l'attenzione degli insegnanti verso aspetti considerati ovvi, che però segnalano una qualche sofferenza: il senso del segno "=" nelle operazioni, la ricerca della risposta errata, l'attenzione al linguaggio e alla decodifica rigorosa, la presentazione non standard delle figure geometriche, il ricavare dal risultato i processi sottesi al suo conseguimento.

In alcune occasioni, crediamo che il Gruppo di Lavoro si sia lasciato prendere la mano. In una prova nazionale che coinvolge tutta la popolazione scolastica ci pare che item un po' subdoli come gli ultimi citati in precedenza, forse non forniscano alcun significativo riferimento di valutazione delle conoscenze specificatamente dichiarate oggetto dell'indagine.

Per rendere più chiara la preoccupazione qui espressa ci chiediamo quale apprendimento si intenda valutare quando al termine della Scuola Primaria si propone il seguente quesito (Valutazione degli apprendimenti - Scuola secondaria di I grado, classe prima):

Su una scatola di spaghetti c'è scritto:

Spaghetti

Cottura 12 minuti
500 grammi

Per cuocere, secondo le indicazioni, 250 grammi di spaghetti quanti minuti sono necessari?

□ *A. 6*
□ *B. 9*
□ *C. 12*
□ *D. 24*

Domanda arguta che ci sembra però non tenere in considerazione questioni proprie della Didattica della Matematica e, di conseguenza, la assoluta prevedibilità del fallimento. Quesiti simili a questo sono stati spesso oggetto di studio da parte di ricercatori in Didattica della Matematica e, per questioni di studio, proposti ad intere scolaresche: NON per saggiare l'acquisizione da parte degli intervistati di particolari competenze ma per analizzare i comportamenti d'aula che coinvolgono la terna insegnante-allievo-sapere.

Le prove INValSI: qualche item su cui riflettere

Osservando da vicino, nella loro struttura e formulazione, i singoli item proposti nel biennio per le classi seconda e quarta primaria, riteniamo di dover rilevare rispetto ad alcuni di essi qualche elemento di problematicità che un'operazione così complessa ed articolata dovrebbe cercare di evitare. In un clima che spesso non ha accolto favorevolmente l'innovazione introdotta con la Valutazione Nazionale degli Apprendimenti è utile che ciascun item sia sottoposto ad attenta valutazione, oltre e al di là del pre-testing che pur è stato posto in atto; e tutto ciò anche su aspetti che sono riconducibili a questioni di tipo puramente formale e/o di precisione linguistica, o a interpretazioni soggette a possibilità di equivoco.

Ecco quanto ha indotto in noi alcune riflessioni critiche oppure, in qualche caso, ci ha portato a sottolineare alcune discrepanze di metodo rispetto alla prassi pratica didattica corrente.

Classe II – Progetto Pilota 3 (2003-2004)

Il contenuto degli item 4, 7, 11[2], anche se non manifestiamo riserve sulla loro proponibilità (ritenendoli anzi opportuni), ci induce a riflettere come la scuola militante proponga percorsi sulle operazioni che poco impegnano gli alunni in ricerche di soluzioni diverse da quelle che solitamente chiedono di trovare il risultato da posizionare dopo il segno "=": un sorta di stabilità di processo unidirezionale che raramente viene presentato nella sua forma reversibile. Questa annotazione potrebbe essere proposta anche per **l'item 14.**

Il risultato ampiamente inferiore alla media che caratterizza **l'item 16** (52%) induce ancora una volta a riflettere sulla fissità con cui spesso nelle classi si propongono alcuni contenuti di apprendimento: nello specifico, un quadrato non viene più riconosciuto se sottoposto ad una semplice rotazione rispetto alla posizione standard.

L'item 12 (v. pag. 9) con la sua elevata percentuale di insuccessi (47%), per esempio, ci sembra fornire una certa evidenza di quanto appena esposto: possiamo ragionevolmente pensare che in classe seconda la grande maggioranza degli alunni sappia scandire un processo che con consapevolezza li porti:

ad identificare in 14, 1da e 4u;
a riconoscere che 3da, aggiunte alla decina di cui sopra, formano 4da;
a concludere che 4da e 4u corrispondono al numero 44.

Oppure:

a riconoscere che 3da è pari a 30u;
a concludere che 30u e 14u corrispondono al numero 44.

Se, come i risultati indicano, l'item in oggetto va incontro ad un così marcato insuccesso esiste evidentemente una stabilità di approccio scolastico alla conoscenza del numero e delle operazioni che trascura di indagare la loro struttura e i loro potenziali significati.

Se questo item intendeva testare, come dichiarato, l'abilità di "Leggere e scrivere numeri naturali sia in cifre che in parole" e se un item strutturalmente identico come il numero 3[3] ha dato un risultato pari al 93% di risposte corrette, crediamo vi sia abbondante materiale per riflettere sulla questione a tutti i livelli: dal singolo insegnante, all'INValSI e al Gruppo di Lavoro che ha costruito

---

[2] Si trascrive come esempio l'item 11:
Quale segno manca nell'operazione seguente?
19 ? 19 = 38
□□ *A. —*
□ *B. +*
□ *C. x*

[3] *Quale numero corrisponde a 4 decine e 7 unità?*
□ *A. 40*
□ *B. 74*
□ *C. 47*

le prove. La diffusione pubblica delle riflessioni di questo ultimo organismo tecnico, il dibattito che si potrebbe e dovrebbe avviare costituiscono a nostro parere il valore aggiunto, l'arricchimento, la capitalizzazione derivante da questa complessa operazione di valutazione degli apprendimenti che interessa l'intero sistema scolastico italiano.

Classe II – Rilevazione degli apprendimenti (2004-2005)
Molte delle annotazioni relative al Progetto Pilota 3 sono riproponibili per alcun item compresi nelle prove proposte nell'anno scolastico 2004-2005.
Aggiungiamo una considerazione relativa **all'item 1** che è così formulato:

Nel parcheggio della stazione ci sono 6 automobili. Con quale operazione puoi calcolare quante ruote ci sono in tutto?

□ *A.* *6 + 4*
□ *B.* *6 + 6 + 6 + 6*
□ *C.* *4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4*

Posto che la risposta corretta attesa è la C, proponiamo due obiezioni:
- tutte le automobili devono obbligatoriamente, pena sanzione, avere la ruota di scorta: in tal caso nessuna delle risposte è corretta;
- se si accetta che un'automobile abbia quattro ruote, perché accanto al procedimento "4 ruote per auto da ripetere sei volte" non si può accettare anche il ragionamento (forse improbabile per un bambino?) che l'insieme delle ruote delle auto parcheggiate sia dato da:

6 ruote anteriori destre
6 ruote anteriori sinistre
6 ruote posteriori destre
6 ruote posteriori sinistre.

Se in una situazione di classe un problema di questo tipo si poteva rivelare estremamente stimolante per il dibattito che poteva provocare, in un test rischia di essere fonte di equivoci per il risolutore e fonte di equivoci per il valutatore.

Proponiamo inoltre un rilievo sulla grafica **dell'item 3.**
Le opzioni di scelta fanno riferimento ad una tabella quadrettata contenenti coordinate espresse in lettere maiuscole. Le tre opzioni di risposta sono così formulate:

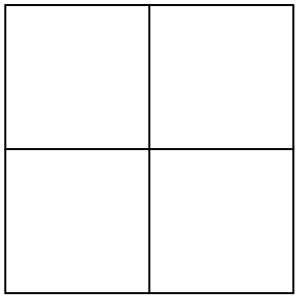
□ *A. 2, B*
□ *B. 4, A*
□ *C. 2, D*

La identità grafica tra le lettere identificative della risposte e le lettere identificative delle coordinate potrebbe indurre a fraintendimenti nella scelta dell'opzione corretta.

Classe IV – Progetto Pilota 3 (2003-2004)
L'item 3 (v. pag 13 "il problema della confezione di the") consegue il 53% di risposte corrette, una performance decisamente mediocre per un "non problema". Si tratta in sostanza di una prova di comprensione del testo; non è una "situazione problematica da risolvere con i numeri "come i proponenti la qualificano. L'insuccesso crediamo sia da imputare non tanto a carenze di abilità matematiche quanto piuttosto a questioni attinenti le dinamiche didattiche proprie delle situazioni d'aula. Ciò costituisce senz'altro motivo di interesse per il didatta, ma riteniamo vada oltre i confini propri che l'INValSI assegna alla sua indagine e rischia in tale contesto di apparire un semplice (e poco significativo) "trucco" per trarre in inganno l'alunno.
Ha destato in noi non poca sorpresa l'esito soddisfacente conseguito nell'**item 5** (percentuali di successo che non si discostano dalla media generale: 75%).

Per esperienza sappiamo che prove di questo tipo, non solo se proposte a bambini ma anche ad adulti, producono un elevato numero di insuccessi dato che la tendenza solitamente è quella di trascurare il conteggio delle figure percettivamente meno visibili.
In recenti prove condotte in classi quarte nell'ultima parte dell'anno scolastico abbiamo consegnato a ciascun alunno un cartoncino con la seguente immagine:

E' poi stato chiesto: *Quanti quadrati vedi in questa figura?*



Risponde correttamente il 15% circa degli alunni. È vero che la nostra prova è solo parzialmente sovrapponibile a quella proposta dall'INValSI, ma non si può negare che si muova all'interno dello stesso contenuto concettuale e che la disparità dei risultati è troppo alta per essere unicamente imputata alla nostra diversa modalità di formulazione.
E' bene ovviamente chiedersi quali possano essere stati gli elementi che hanno favorito una prestazione così elevata; auspichiamo naturalmente che essa sia unicamente conseguente ad una buona educazione all'osservazione e alla corretta percezione.
Ci sembra, poi, assolutamente irragionevole la richiesta formulata **nell'item 22:** anche non considerando che le prove INValSI dovrebbero testare le conoscenze degli alunni alla fine della terza classe e che quindi per tale classe le frazioni non sono incluse nelle Indicazioni Nazionali, non crediamo si possa proporre in una fase di primo approccio alla frazione la ricerca del valore dell'intero, dato il valore della parte frazionaria (⅓).
Un "fuori misura"che è stato ampiamente recuperato nell'anno successivo dove le prove vertono unicamente su semplici individuazioni di "*un terzo*", "*un quarto*", "*la metà*" di quantità intere, e dove anche la scrittura alfabetica manifesta l'intenzione di privilegiare gli aspetti semantici rispetto al formalismo matematico.

Classe IV – Rilevazione degli apprendimenti (2004-2005)
Abbiamo già segnalato come in molti casi le prove relative a questo anno mostrino un indice di facilità maggiore rispetto a quelle analoghe proposte con il Progetto Pilota3 o appaiano sottoposte ad una più equilibrata taratura.
In geometria rileviamo negli **item 6 e 12** una richiesta ("calcolare per conteggio aree e perimetri") meno banale rispetto a quella che, a nostro parere, caratterizzava i corrispondenti **item 2 e 23** dell'anno precedente.
Troviamo molto interessante (e sarebbe interessante conoscere il motivo di tale scelta da parte del Gruppo di Lavoro) la diversa formulazione **dell'item 9** del Progetto Pilota 3 che era:
23 × 15 dà un risultato minore di 23 × 16. Di quanto sarà minore?
□ *A. 23*
□ *B. 16*
□ *C. 15*
□ *D. 1*

e che nella formulazione del 2004-2005 diviene:
Se nella seguente moltiplicazione:

$$72 \times 59$$

invece di moltiplicare per 59 moltiplichi per 58 di quanto diminuisce il risultato?

□ *A. 72*
□ *B. 59*
□ *C. 58*
□ *D. 1*

Questa seconda scelta appare più complessa sul piano della gestione del comprensione del testo da parte del bambino: è infatti legata ad un percorso di implicazione logica, ben nota alla didattica della matematica, mentre nella formulazione dell'anno precedente si enunciava, con linguaggio scarno ed essenziale, una comparazione tra due operazioni aritmetiche e si chiedeva di rilevarne la differenza.
Sarebbe di estremo interesse osservare quale diversità di esiti hanno prodotto le due formulazioni.
L'elenco di osservazioni che abbiamo qui presentato speriamo non appaia tedioso e proposto per sterile puntiglio; riteniamo che tutte le analisi che sollecitano interrogativi abbiano una loro intrinseca valenza perché favoriscono la riflessione e consentono una presa di coscienza.
Stando questa nostra convinzione, proponiamo in allegato una nostra analisi **dell'item 10**, classe IV (Progetto Pilota 3) già apparsa nella pubblicazione curata dall'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia Romagna "*Valutare per migliorarsi"* Tecnodid 2005.

I risultati delle prove INValSI

Tutti hanno rilevato come il complesso degli item proposti per le singole classi copra assai parzialmente il corpo di conoscenze/abilità che le prove INValSI avrebbero dovuto testare.
Se ciò corrisponde a precisa scelta di metodo per il quale, non potendo testare "l'universo mondo", si adottano criteri selettivi che mutano di anno in anno, sarebbe bene che ciò venisse reso esplicito e comunicato; d'altra parte, se la valutazione ha come intendimento un monitoraggio sul piano nazionale dei punti di forza e dei punti di debolezza, è assolutamente legittimo procedere per focalizzazioni successive e progressive anche sulla base dei risultati di ciascun anno.
In questa situazione di carenza di dati e opacità dei fini cercheremo di proporre alcune riflessioni che diano ragione di alcuni sofferenze che, per esempio nella nostra regione, si sono rilevate superiori alla media e proveremo ad indicare, dal nostro punto di vista, alcune plausibili spiegazioni.

1) Per la Scuola Primaria una sequenza così ampia di domande e il richiamo contemporaneo a conoscenze molteplici possono aver costituito un ostacolo di tipo metodologico. La prassi didattica corrente in genere si muove per brevi segmenti nei quali, di volta in volta, si applicano procedure di valutazione e spesso si privilegia una valutazione non formalizzata, ricca di interazioni sociali, ove la conoscenza si costruisce progressivamente.
2) Gli item nei quali le percentuali di successo risultano meno elevate o più elevate rispetto alla media suggeriscono che nelle classi:
   a) perdura una attenzione privilegiata verso i percorsi algoritmici;
   b) affiora con insistenza il cosiddetto contratto didattico le cui clausole conducono a porre in ombra un autonomo processo di ricerca della soluzione a favore di procedure routinarie suggerite dalla struttura dell'esercizio/della consegna, dalla presenza di "parole chiave", da modelli rigidi evidentemente interiorizzati nel corso della quotidiana attività in classe, ma non per questo utilizzabili in ogni circostanza.
3) Quanto espresso al punto precedente potrebbe sottendere stili di insegnamento/apprendimento poco attenti
   a) alla metacognizione come disposizione a riflettere sui propri processi di pensiero e di azione;

b) a misurare la congruenza delle risposte con la situazione problematica affrontata e la sua validità risolutiva.

4) Le pratiche didattiche correnti fanno presumere che quanto proposto dall'INValSI siano prove alla portata degli alunni della Scuola Primaria e che rientrino nella normale attività didattica. Di fronte agli insuccessi la riflessione conduce alla constatazione che il trasferimento cognitivo non possiede la mobilità desiderata e ciò che si impara resta spesso saldamente ancorato all'ambito in cui l'apprendimento si è conseguito.
5) La concisione a cui i proponenti la prove INValSI hanno avuto attenzione nella presentazione degli item induce a porre il problema delle *variabili redazionali* per le quali la risoluzione corretta è influenzata dalla redazione/formulazione del problema. Questa osservazione conduce direttamente agli studi sui rapporti tra lingua comune e linguaggio matematico.
6) La ricerca in didattica suggerisce che qualsiasi risposta che noi diamo ad una domanda che intende verificare le nostre conoscenze conduce inevitabilmente a 4 esiti:
   a) una risposta corretta frutto di un ragionamento corretto,
   b) una risposta scorretta frutto di un ragionamento scorretto,
   c) una risposta corretta frutto di un ragionamento scorretto,
   d) una risposta scorretta frutto di un ragionamento corretto.

   Ora convinzioni e misconcezioni che contornano il bagaglio cognitivo dei nostri alunni non ci rassicurano affatto che tutte le risposte fornite appartengano alla tipologia a) o a quella b).
7) Concludiamo con un riferimento alla formula che l'INValSI ha adottato per la sua rilevazione: domande a risposta multipla. Questa modalità non ci sembra avere molto spazio nella pratica scolastica corrente. Il suo uso andrebbe invece stimolato soprattutto perché l'alunno, oltre alla ricerca della risposta giusta, misuri anche la sua capacità di riconoscere l'errore.

   La manualistica scolastica non concede molto spazio a tale approccio didattico e probabilmente l'invalsa frenesia del fare che caratterizza le nostre scuole non sembra consentire divagazioni.

   È raro rinvenire, per esempio, nei libri di testo la presentazione di situazioni problematiche per le quali gli autori suggeriscono tre o quattro ipotetiche soluzioni e dove la consegna non è solo individuare la/le risposta/e corretta/e, ma anche motivare, argomentando, la scorrettezza delle restanti.

   Una prassi di questo tipo, crediamo, costituisca un valore aggiunto al lavoro d'aula e contribuisca, forse, a rinforzare un auspicabile atteggiamento critico e riflessivo da porre in atto di fronte ad ogni quesito e di fronte ad ogni risposta connessa.

Conclusione

Il campo di ricerca e di riflessione che le prove INValSI hanno aperto possono costituire un importante momento di dibattito e di crescita del sistema scuola in Italia, sistema che ovviamente non ha solo bisogno di procedure di Valutazione Nazionale efficienti ed adeguate.

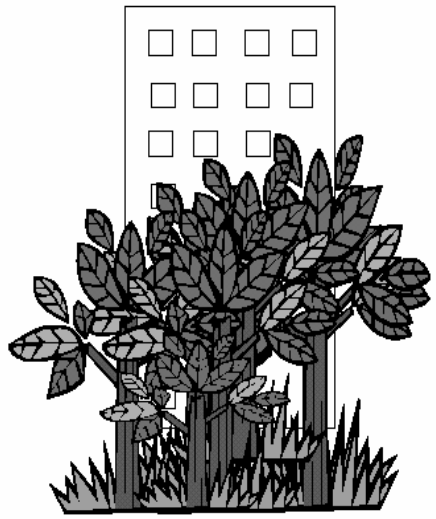
Restando al tema e ribadendo concetti già espressi, crediamo che la scuola potrà trarre comunque giovamento:

- da un progetto di valutazione rigorosa che esplicita in modo trasparente il suo quadro di riferimento, gli obiettivi generali e specifici dell'indagine, le modalità di costruzione e di validazione delle prove e che è attento alla voce della scuola e della ricerca in didattica;
- da feed back di tipo statistico, da riflessioni attraverso le quali il mondo degli operatori scolastici e degli studiosi si impegna a fornire chiavi di lettura e suggerimenti, apre dibattiti, si interroga, cerca riposte e formula proposte.

Allegato

Costruire prove di valutazione standardizzate valide per l'intero sistema scolastico di una nazione pone l'esigenza di mantenere un controllo costante di verifica dello strumento adottato, delle sue modalità di somministrazione, dei contenuti/abilità/competenze che tale strumento intende esplorare. I Progetti Pilota di valutazione della scuola italiana attuati negli scorsi anni, la prevista generalizzazione delle prove a tutte le istituzioni scolastiche, dovranno continuare a mantenere alto il livello di attenzione e di riflessione critica di chi opera a qualsiasi titolo in ambito scolastico-educativo; processi di questo tipo introducono innumerevoli variabili a cui si legano altrettanti innumerevoli incomprensioni e pericoli, non ultimo, per esempio, quello che Howard Gardner[4], in un contesto socio-politico diverso, ha chiamato *the testing obsession* all'interno della quale il rischio latente è quello di sopravalutare il prodotto rispetto al processo o, per dirla ancora con Gardner, rendere la *test performance more important than education.*

10. Ogni piano della facciata ha 4 finestre.
Le finestre in tutto sono 32.



Quanti sono i piani dell'edificio?
A. 6
B. 7
C. 8
D. 9

Posta questa premessa proponiamo, con una scelta assolutamente arbitraria e dal punto di vista di un docente di Scuola Primaria, una rapida analisi di una prova destinata agli alunni di classe 4ª nell'ambito del PP3, proposta nell'anno scolastico 2003/04. Si tratta dell'item 10 delle "Prove di matematica" riprodotto qui a fianco che, per esplicita indicazione dei proponenti, intende testare l'abilità dell'alunno di "saper esplorare, e risolvere situazioni problematiche utilizzando la moltiplicazione e la divisione" che è l'obiettivo specifico di apprendimento che l'allegato B del D.L. 19/2/2004, n. 59 prevede per il primo biennio di Scuola Primaria (classi 2^ e 3^).

La situazione problematica presentata rientra senza dubbio, come tipologia, tra quelle che la prassi scolastica corrente solitamente propone nelle classi; in aggiunta questo item provvede a una rappresentazione iconica (apparentemente) coerente con la situazione descritta dal testo verbale. La risoluzione dovrebbe prevedere il ricorso ad una operazione di divisione e la identificazione del risultato all'interno di 4 possibili opzioni. I risultati ottenuti a livello nazionale, secondo i dati in nostro possesso, non si discostano sostanzialmente dalla media raggiunta (72%) nell'intera *Prova di matematica*. Tale performance viene confermata da altri due item (11 e 24) che cercano di esplorare le stesse abilità e che si situano intorno o al di sopra della media.

[4] In: *Los Angeles Times*, 31/12/2000

Ciò potrebbe indurre a considerare con soddisfazione i risultati mediamente raggiunti e inferire che il possesso del significato concettuale di divisione e l'uso consapevole di tale strumento formale sono stati conseguiti dalla stragrande maggioranza degli alunni italiani di 4ª primaria.
Tuttavia, chi vive quotidianamente a stretto contatto con gli alunni non può fare a meno di rilevare alcune sostanziali differenze che all'interno di una comune classe sono solitamente rilevabili in ordine alla adozione della strategia risolutiva che conduce al risultato corretto. Le quantità numeriche da gestire sono tali che, qualora la situazione problematica sia stata adeguatamente compresa, molti alunni potrebbero bypassare una formalizzazione matematica rigorosa (che è quella attesa dall'insegnante) a favore di procedure intuitive che sono altrettanto efficaci e che potrebbero, per esempio snodarsi attraverso una procedura additiva, se non attraverso una procedura sottrattiva, come quella che potrebbe essere indotta dall'uso della linea dei numeri (quanti "salti" da 4 ?), oppure attuata attraverso un semplice calcolo mentale di addizione ripetuta. L'adozione di queste strategie conferma il conseguimento dell'obiettivo? O si situa ad un livello di pre-concettualizzazione del significato di moltiplicazione e divisione?
Un'ulteriore annotazione va dedicata alla rappresentazione iconica della situazione descritta: è evidente che l'estensore della prova non ha voluto inserire un semplice elemento decorativo, ma ha inteso fornire un modello concreto tale da favorire la formazione di un'immagine delle situazione e la capacità dell'alunno di matematizzare la realtà; viene però inserita di fronte all'edificio un'alberatura che nasconde parzialmente la facciata e le relative finestre e che come tale chiede all'alunno di andare oltre l'immagine. Sono due le considerazioni che vorremmo fare in relazione a questa presentazione:
a) la verosimile convinzione dell'alunno che l'immagine sia una fedele riproduzione della realtà descritta potrebbe condurre alcuni, e non di rado i più riflessivi ed analitici, a mettere in crisi il proprio processo risolutivo corretto in dipendenza del fatto che il realismo della figura ad un'osservazione minuziosa non regge completamente: al terz'ultimo piano, pur non essendo coperta dagli alberi, una finestra non viene raffigurata, così come in basso, tra le foglie si intravede parzialmente una finestra accanto alla quale potrebbero essercene delle altre che invece mancano. Questo conflitto tra immagine mentale e rappresentazione iconica della situazione crea disagio e pone l'alunno in uno stato d'animo sospettoso: a fronte della banalità della risoluzione egli teme che, sotto sotto, si celino subdoli tranelli ed implicite domande che non riesce a gestire e che, almeno temporaneamente, inibiscono una sua, altrimenti spontanea, risoluzione del problema.
b) La formulazione verbale del testo è tale da non ingenerare ambiguità, l'incompletezza dell'immagine però potrebbe indurre alcuni a ritenere che l'azione risolutiva del problema debba passare attraverso una ricostruzione realistica della situazione che gli alberi occultano, quindi piuttosto che costruirsi un modello matematico potrebbero mentalmente, se non addirittura concretamente, costruire un modello di edificio ove gli alberi non nascondano più la facciata; alcuni colleghi insegnanti interpellati ritengono che l'immagine di fatto non aiuti la risoluzione e pensano che molti dei loro alunni sarebbero "distratti" dall'immagine e che comunque essa non costituisca elemento facilitatore. Questa convinzione, apparentemente sorprendente, sembra trovare conferma nell'item 24 che è strutturalmente identico a quello qui esaminato e non è arricchito da alcuna immagine:
"Gli alunni delle classi quarte sono 138. Per fare un gioco devono formare squadre da 6 bambini ciascuna. Quale operazione fai per sapere quante squadre si formano?".
Il testo è seguito dall'indicazione delle quattro diverse operazioni possibili tra i numeri 138 e 6.
Questo item produce risposte corrette superiori alla media di circa il 10%. Non ritenendo di dover attribuire gli insuccessi nell'item 10 all'errore di calcolo nella divisione 32:4, resta problematica questa disparità di prestazione, sia pur non macroscopica, tra due problemi sostanzialmente identici; a meno che non si voglia attribuire al contesto descritto in quest'ultimo problema una valenza

affettiva per l'alunno che lo coinvolge cognitivamente in misura maggiore; una eventualità che peraltro alcune ricerche in didattica hanno efficacemente descritto[5].

Bibliografia

Nel testo molti sono i riferimenti a documenti che appaiono sul sito dell'INValSI : www.INValSI.it; alcuni riferimenti a dati statisti sono stati tratti da materiali presenti nel sito www.matematicainsieme.it.

Pur non citandoli espressamente all'interno del testo abbiamo tratto molte suggestioni da:

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Godino DJ., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2005). La valutazione in matematica e le prove INValSI. *La matematica e la sua didattica*, 3, 359-371.

Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora.

L'allegato è tratto da:

Benini, Gianferrari (2005). *Valutare per migliorarsi.* Napoli: Tecnodid

[5] D'Amore et alii (1995). La ri-formulazione del testo dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, 2, 131-146.

La Scuola Secondaria di I grado

Gloria Balboni e Anna Cristina Canella

Scuola Media "Tasso-Boiardo" di Ferrara

Premessa

Il decreto legislativo del 19 Novembre 2004 n. 286 che istituisce il Servizio Nazionale di Valutazione del Sistema Educativo d'Istruzione e di Formazione all'art 3, riporta i compiti dell'istituto ed in particolare stabilisce:

- punto a) "l'istituto effettua verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni d'istruzione e d'istruzione e formazione professionale, anche nel contesto dell'apprendimento permanente….".
- punto d)"l'Istituto studia le cause dell'insuccesso ……"
- punto g)"l'Istituto svolge attività di formazione del personale docente…. connessa ai processi di valutazione …… ".

In relazione agli elementi legislativi indicati sono possibili alcune osservazioni in relazione a:

1. Significato della valutazione esterna del sistema scolastico.
2. Tempi di somministrazione e metodi di somministrazione delle prove.
3. Valutazione e comunicazione dei risultati.
4. Conoscenze e abilità accertate

1. Significato della valutazione esterna del sistema scolastico

Considerato che l'obiettivo dichiarato delle prove INValSI è quello di una valutazione di sistema che intende misurare l'efficacia del sistema scolastico globalmente inteso, a livello nazionale e per singoli settori e *non* vuole essere una prova valutativa dei singoli alunni o delle singole classi né strumento valutativo dei singoli insegnanti, viene spontaneo domandarsi quali siano le cause della "resistenza" che alcune scuole oppongono alla somministrazione dei test d'accertamento di conoscenze e abilità in italiano, scienze e matematica.

Un prodotto, un'azione, in qualsiasi campo, per accertarne il valore, devono essere valutate.

Se la Scuola vuole richiamare l'attenzione sul proprio ruolo sociale e vuole mantenere e potenziare l'autonomia da poco conquistata non ha alcun interesse a non farsi valutare in relazione alle attività/prodotti che le sono propri: apprendimento, formazione.

La necessità di superare una valutazione di tipo autoreferenziale, che ha nuociuto e ancora nuoce all'immagine della scuola e dei suoi operatori, è coerente, inoltre, al nuovo contesto di globalizzazione degli apprendimenti (prove Ocse-Pisa; TIMSS…)

Mettersi in relazione con tale contesto non significa accettarlo passivamente, ma possedere strumenti e la valutazione esterna è uno di questi, per partecipare alla sua formazione e favorirne eventuali cambiamenti e sviluppi in rapporto a: finalità, strumenti coinvolti, competenze in gioco, affidabilità. Sarebbe interessante, ad esempio, sviluppare il coinvolgimento dei docenti attorno ad alcune domande chiave: quali competenze matematiche indagare? Come? Matematica per il cittadino? Matematica come scienza?

2. Tempi di somministrazione e metodi di somministrazione delle prove

Nell'Allegato C della Riforma Scolastica, per la Scuola Secondaria di I grado, si legge: "*All'inizio del biennio*, il Servizio Nazionale di Valutazione procede alla valutazione esterna, riferita sia agli

elementi strutturali di sistema, sia ai livelli di padronanza mostrati dagli studenti nelle conoscenze e nelle abilità indicate negli obiettivi specifici d'apprendimento della fine della Scuola Primaria".
Assume quindi carattere transitorio (come dichiarato anche nell'ultima direttiva n. 56 del 12 luglio 2004) la prassi di somministrare le prove nel periodo febbraio-marzo, slittata ad aprile-maggio per l'anno 2004-05.
Ma, anche se le prove saranno somministrate all'inizio dell'anno scolastico, rimane, per la Scuola Secondaria di I grado e soprattutto per i suoi insegnanti, l'impossibilità di avere un riscontro sull'adeguatezza delle proprie scelte didattiche: infatti, solo per gli altri livelli scolari, sono previste prove in itinere (classe seconda e quarta della Scuola Primaria, classe terza della Scuola Secondaria di II grado). Le prove previste per la classe prima della Scuola Secondaria di II grado non possono inoltre rispondere a tale scopo poiché gli alunni in entrata provengono da istituti scolastici diversi.
Può essere considerata un'incongruenza, inoltre, che nei dati statistici diffusi dall'INValSI, i risultati raggiunti dagli alunni in uscita dalla Scuola Primaria siano attribuiti alla Scuola Secondaria di I grado; sarebbe più corretto attribuire a quest'ultimo ordine di scuola i risultati raggiunti nelle prove proposte nel primo anno della Scuola Secondaria di II grado.

3. Valutazione e comunicazione dei risultati
I dati statistici comunicati dall'INValSI alle singole scuole contengono molte indicazioni: punteggi normalizzati ottenuti dagli alunni della scuola, della regione, dell'area Istat d'appartenenza, dell'Italia in relazione ai seguenti indici: media, deviazione standard, minimo, massimo, moda e mediana; percentuale di studenti della scuola nei quartili e percentuale di studenti nei quartili di riferimento (regione e area Istat d'appartenenza); punteggi medi nei quartili degli alunni della scuola e nei quartili di riferimento (regione, area Istat d'appartenenza e Italia);punteggi per tipologia d'item degli alunni della scuola e quelli riferiti alla regione, all'area Istat d'appartenenza e all'Italia; punteggi normalizzati ottenuti nelle singole classi e percentuale di studenti nei quartili nelle singole classi.
Si nota, tuttavia, sempre a livello di scuola, la mancanza di dati relativi ai punteggi totalizzati dagli alunni nei singoli item. e, a livello di classe, la mancanza anche di quelli relativi alle diverse tipologie d'item (numeri, geometria, misura, pensiero razionale, dati e statistica).
L'assenza di tali dati, mentre non raggiunge l'eventuale scopo di evitare che il singolo docente si senta, di fatto, valutato, (già l'indicazione della media della classe potrebbe essere letta come una valutazione dell'azione dell'insegnante) impedisce utili e approfondite riflessioni sulla possibilità di miglioramento dell'azione didattica della scuola e dei suoi operatori.
Sarebbe almeno auspicabile che, come già avviene in altri paesi, la pubblicazione dei dati statistici relativi ai risultati delle prove fosse integrata con chiavi di lettura per l'interpretazione e il superamento degli insuccessi.

4. Conoscenze e abilità accertate
Poiché nel punto a) dell'art 3 del decreto legislativo del 19 Novembre 2004 n. 286 si legge "l'istituto effettua verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti" e gli item proposti sono in perfetta coincidenza con gli Osa della Riforma del primo ciclo d'istruzione (Numero, Geometria, Misura, Dati e Previsioni e Introduzione al pensiero razionale), ma poco più di un alunno su due risponde in modo corretto ai quesiti proposti nell'ambito dei diversi nuclei, sorge il problema di individuare almeno alcune delle cause di tale insuccesso attraverso l'analisi di alcuni item.
Possibile chiave d'analisi potrebbe essere la ricerca di coerenza tra gli item proposti e le conoscenze e abilità previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria, in relazione alle attese e alla prassi didattica dei docenti della Scuola Secondaria di I grado.
Per l'analisi sono stati scelti alcuni item di matematica proposti nell'ambito del **Progetto Pilota 20003-2004** (le prove dell'anno 2004-2005 non sono ancora state valutate e quindi non si conoscono i risultati al momento della stesura di quest'articolo).

Per l'analisi degli item sono stati consultati /utilizzati i seguenti Documenti:

- Intervento prof.ssa Martha Isabel Fandiño Pinilla (docente nelle Università di Bolzano e di Bologna e presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno) al Seminario regionale:"La valutazione come risorsa per il miglioramento" del 14 /02/05
- Il libro di Bruno D'Amore: Elementi di didattica della matematica, Bologna: Pitagora, 1999.
- Intervento della Prof.ssa Lucia Ciarrapico al Seminario regionale: "La valutazione come risorsa per il miglioramento" del 14 /02/05.
- Intervento del prof. M. Marchi dell'Università Cattolica di Brescia nei Seminari Nazionali INValSI 2003 e 2004

Tema : numero

Conoscenze previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:

- Ordine di grandezza ed approssimazione
- Relazioni tra numeri naturali; consolidamento delle quattro operazioni e dei relativi algoritmi di calcolo.
- Introduzione in contesti concreti dei numeri interi relativi (positivi, nulli, negativi).
- Ordinamento dei numeri interi relativi sulla retta numerica.
- Introduzione dei numeri decimali
- Nozione intuitiva e legata a contesti concreti della frazione e loro rappresentazione simbolica.
- Scritture diverse dello stesso numero (frazione, frazione decimale, numero decimale).

Abilità previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:

- Confrontare l'ordine di grandezza dei termini di un'operazione tra numeri decimali ed il relativo risultato.
- Riconoscere e costruire relazioni tra numeri naturali (multipli, divisori, numeri primi, …)
- Leggere e scrivere numeri naturali e decimali consolidando la consapevolezza del valore posizionale delle cifre.
- Confrontare e ordinare numeri decimali e operare con essi.
- Rappresentare i numeri sulla retta numerica.
- Confrontare e ordinare le frazioni più semplici, utilizzando opportunamente la linea dei numeri.
- Eseguire le quattro operazioni anche con numeri decimali con consapevolezza del concetto e padronanza degli algoritmi.
- Avviare procedure e strategie di calcolo mentale, utilizzando le proprietà delle operazioni.
- Effettuare consapevolmente calcoli approssimati.
- Fare previsioni sui risultati di calcoli eseguiti con mini calcolatrici.

Suddivisione degli item

I tredici item proposti all'interno del tema numeri possono essere raggruppati in riferimento alle quattro componenti distinte e fondamentali che caratterizzano l'apprendimento della matematica (prof. Martha Isabel Fandiño Pinilla):

- apprendimento di concetti:14;19; 26
- apprendimento algoritmico:1;24;
- apprendimento strategico:7;9;10;16;
- apprendimento comunicativo, inteso come linguaggio:3; 5;10;21.

Per ogni tipo di item è stato individuato il tipo di apprendimento ritenuto prevalente.

Analisi di alcuni item

Gli apprendimenti verificati attraverso i diversi quesiti sono, nel complesso, coerenti con le conoscenze e abilità indicate nel documento di riferimento; si segnala tuttavia l'assenza di item relativi all'ordinamento di numeri sulla retta e alle relazioni tra numeri, prerequisiti importanti l'uno per l'ampliamento del concetto di numero, l'altro per lo sviluppo del pensiero razionale.

L'analisi dei risultati mette in evidenza la difficoltà a rispondere in modo corretto soprattutto agli item n.7 e n.16 (di seguito riportati), nei quali la percentuale di risposte esatte è stata rispettivamente del 41% e 42 % e quindi inferiore alla media regionale (56,88%).
Può essere significativo il fatto che entrambi i quesiti appartengano al gruppo dell'apprendimento strategico, ad ulteriore conferma che la prassi didattica privilegia gli aspetti algoritmici.
In particolare nel quesito n.7 il numero di alunni che rispondono esattamente A (1398) è quasi uguale al numero di alunni che rispondono D (1263), mettendo così in evidenza l'adeguata assimilazione dell'uso dell'operatore frazionario, ma o una incompleta lettura del testo, o una mancata comprensione delle richieste, o una difficoltà ad individuare la strategia di soluzione del problema.

QUESITO n. 7

Una scatola contiene 48 caramelle di vari gusti.: $\frac{1}{6}$ sono al gusto di limone. Quante sono le rimanenti caramelle?

A. 40
B. 32
C. 16
D. 8

Nel quesito n.16 nonostante la prassi didattica mette in evidenza carenze nell'apprendimento delle procedure di stima e approssimazione all'uscita dalla Scuola Primaria, il numero di alunni che rispondono correttamente C (1450) parrebbe evidenziare sia la conoscenza di questi contenuti, sia l'utilizzo consapevole delle proprietà delle operazioni come strategie di calcolo: 36x19 = 36x (20 – 1) = 36x20 – 36 .
L'elevato numero di alunni (1045), che rispondono B evidenzia o un semplice errore di calcolo (36 x 20 = 620 anziché 720), oppure un'errata procedura nell'esecuzione dell'operazione di moltiplicazione legata ad una non corretta acquisizione del concetto di valore posizionale della cifra, ma una adeguata capacità di approssimazione (approssimazione del 19,… a 20; 2 x 3 affiancato a 2x 6).

QUESITO n.16

La parte decimale dei termini della moltiplicazione è cancellata dalla linea nera.

36,—— × 19,— =

Quale potrebbe essere il risultato?

A. 70,395
B. 620,15
C. 703,95
D. 841,15

La tipologia degli item esaminati conferma l'intenzione dichiarata dall'INValSI: "..anche quando la domanda si riferisce alla esecuzione di procedimenti algoritmici, la difficoltà non consiste mai nella lunghezza o nella complicazione dei calcoli, ma piuttosto nella necessità di possedere con chiarezza e sicurezza i concetti coinvolti".

Tema : Geometria
Conoscenze previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:

- Consolidamento, in maniera operativa, del concetto di angolo.

- Analisi degli elementi significativi (lati, angoli, …) delle principali figure geometriche piane.
- Denominazione di triangoli e quadrangoli con riferimento alle simmetrie presenti nelle figure, alla lunghezza dei lati e all'ampiezza degli angoli.
- Concetto di isoperimetria e di equiestensione in contesti concreti.
- Riconoscimento di simmetrie, rotazioni, traslazioni.

Abilità previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:

- Usare, in contesti concreti, il concetto di angolo.
- Esplorare modelli di figure geometriche; costruire disegnare le principali figure geometriche esplorate.
- Partendo da osservazioni materiali, riconoscere significative proprietà di alcune figure geometriche (es. figure isoperimetriche o equiestese)
- Individuare simmetrie in oggetti o figure date, evidenziandone le caratteristiche.
- Riconoscere figure ruotate o traslate di figure assegnate.
- Operare concretamente con le figure effettuando trasformazioni assegnate.

Suddivisione degli item

- apprendimento di concetti:2;8;17;20;22;
- apprendimento algoritmico:28
- apprendimento strategico:6;25;
- apprendimento comunicativo, identificato per la geometria non tanto come linguaggio ma come un processo di giustificazione, argomentazione, dimostrazione: nessun item.

Per ogni tipo di item è stato individuato il tipo di apprendimento ritenuto prevalente

Analisi di alcuni item

Gli apprendimenti verificati appaiono più coerenti con le conoscenze indicate sopra, ma meno con le abilità. Le modalità di risoluzione dei quesiti non consentono, infatti, attività di tipo manipolativo, costruttivo e descrittivo in contraddizione con la prassi didattica nella Scuola Primaria e sono quindi probabile causa del numero piuttosto basso di risposte corrette (58,24%.).
L'esame dei quesiti n.17 e n.20 (di seguito riportati) conferma tale ipotesi.

QUESITO n. 17

Matteo ha a disposizione alcune cannucce di diversa lunghezza e vuole utilizzarle per costruire dei triangoli. Con quale, tra le seguenti terne di misure, NON riuscirà a costruire un triangolo?

- A. 6 cm ; 6 cm ; 6 cm
- B. 7 cm ; 7 cm ; 4 cm
- C. 3 cm ; 4 cm ; 5 cm
- D. 2 cm ; 7 cm ; 12 cm

QUESITO n. 20

Quale tra le seguenti figure corrisponde a questa descrizione:
«Un poligono ha 4 lati e 3 angoli interni ottusi »?

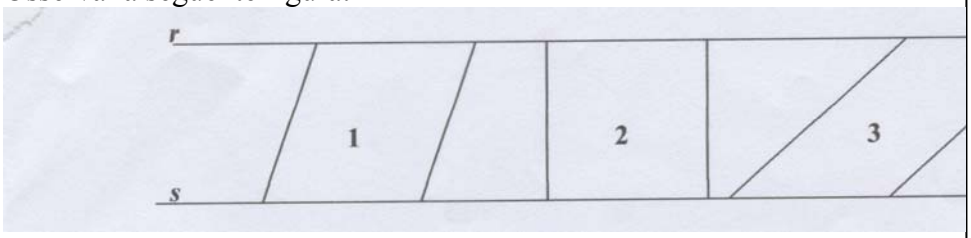
- A. Parallelogramma.
- B. Trapezio.
- C Non esiste.
- D. Rombo

Gli alunni, dovendo usare solo i fogli non quadrettati del fascicolo INValSI, in mancanza di strumenti geometrici (riga, squadra, compasso) rispondono in modo corretto solo se hanno concettualizzato il criterio di esistenza di un triangolo rispetto ai lati e le proprietà dei quadrilateri; la possibilità, chiaramente espressa dall' INValSI,di utilizzare strategie di tipo operativo potrebbe aumentare il numero di risposte esatte.

La concettualizzazione infatti è un processo individuale che avviene dopo un numero di esperienze diverso da alunno ad alunno (personalizzazione dell'apprendimento) ; pertanto una prova posta alla fine della Scuola Primaria dovrebbe dare la possibilità di usare strategie diverse di soluzione, in coerenza all'obbligo di legge di costruire piani di studio personalizzati. .
Se a quanto precedentemente detto si aggiunge che nel quesito n.20, tra le possibilità di risposta, manca quella corretta, l'insuccesso può essere una conseguenza legata al "contratto didattico" che induce l'alunno a dare sempre, comunque, una risposta; giustificata in questo caso dalla considerazione che un quesito a risposta chiusa, come è il test, non dovrebbe prevedere una risposta diversa da quelle proposte. Ciò avrà certo creato imbarazzo e perplessità in un bambino di prima media.
Nel quesito n.20 si possono inoltre individuare quegli ostacoli che, in mancanza di un percorso didattico adeguatamente strutturato, impediscono quelle " rotture cognitive, assimilazione ed accomodamento di immagini e di concetti, formazione di modelli, modifica di modelli intuitivi, accettazione di concezioni, modifiche di linguaggi, modifica di sistemi cognitivi, inserimento di fatti nuovi in copioni abituali, eccetera "(B. D'Amore, *Didattica della matematica*), che costituiscono le fasi indispensabili ad un apprendimento consapevole.
Il quesito n. 6, nel quale il 27 % degli alunni, risponde correttamente C mentre il 40%, risponde B, mette invece in evidenza la prevalenza di una osservazione intuitiva e acritica (la diversità dei quadrilateri) che ha escluso o il riconoscimento dell'uguaglianza delle altezze e quindi l'applicazione di una regola elementare (base per altezza), oppure il riconoscimento di figure equivalenti ottenute attraverso trasformazioni successive.

QUESITO n. 6

Osserva la seguente figura:



Le rette r ed s sono parallele e i parallelogrammi 1, 2 e 3 hanno la base di ugual misura sulla retta s. I lati opposti alle relative basi si trovano sulla retta r.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
□ A. Solo 1 e 2 hanno la stessa area.
□ B. Nessuno dei tre ha la stessa area.
□ C. Hanno tutti e tre la stessa area.
□ D. Solo 1 e 3 hanno la stessa area.

Tema : misura
Conoscenze previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:
Identificare vari e diversi attributi misurabili di oggetti ed associarvi processi di misurazione, sistemi ed unità di misura.
Abilità previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:
- Misurare lunghezze.
- Determinare in casi semplici perimetri, aree e volumi delle figure geometriche conosciute.

- Comprendere la “convenienza” ad utilizzare unità di misura convenzionali e familiarizzare con il sistema metrico decimale.
- In contesti significativi attuare semplici conversioni (equivalenze) tra un’unità di misura e un’altra (tra cm e metri, tra grammi e kg …)
- Comprendere che le misure sono delle modellizzazioni approssimate e intuire come la scelta dell’unità di misura e dello strumento usato influiscano sulla precisione della misura stessa
- Ipotizzare quale unità di misura sia più adatta per misurare realtà diverse (la distanza Roma – NewYork, la circonferenza di un anello, la superficie di un campo da calcio, ecc.).

Suddivisione degli item

- apprendimento algoritmico:11;13
- apprendimento strategico: 4; 12; 15
- apprendimento comunicativo e apprendimento di concetti: nessun item, nonostante tra le abilità siano previste fasi che concorrono al loro sviluppo (“Comprendere che le misure sono delle modellizzazioni approssimate e intuire come la scelta dell’unità di misura e dello strumento usato influiscano sulla precisione della misura stessa”)

Analisi di alcuni item

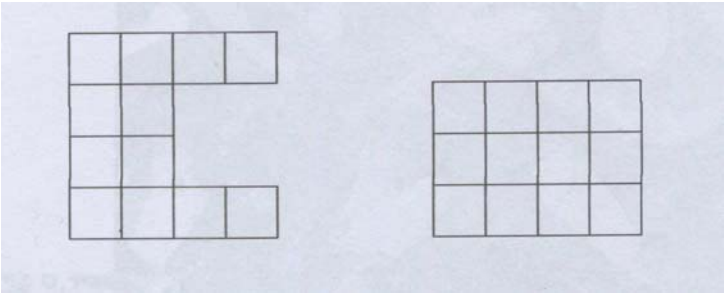
Gli apprendimenti verificati rivelano una adeguata corrispondenza con le conoscenze e con le abilità di riferimento.

Le cause dell’insuccesso, piuttosto significativo in quanto solo il 55% degli alunni risponde in modo corretto, possono dipendere dalla mancanza di un adeguato sviluppo dell’aspetto procedurale del misurare: individuare grandezze, manipolare, confrontare, individuare l’unità di misura, costruire e utilizzare strumenti di misura…: e quindi un prevalere, nella prassi didattica, degli aspetti algoritmici, che, se frutto di esclusiva memorizzazione, sono facilmente dimenticati.

Nel quesito n.15 si aggiunge, come causa di errore, la non chiara identificazione delle grandezze da confrontare (perimetro e area), dato confermato ampiamente dalla prassi didattica.

QUESITO n. 15

Testo : Osserva attentamente le seguenti figure formate da 12 quadratini.



Le due figure hanno...

□ A. diversa area e diverso perimetro.
□ B. stessa area e diverso perimetro.
□ C. diversa area e stesso perimetro.
□ D. stessa area e stesso perimetro.

Mentre nel caso del quesito n.4 le risposte non corrette potrebbero dipendere dallo sviluppo non adeguato di uno dei nodi epistemologici del nucleo: la scelta dell’unità di misura più adatta ad un contesto.

Tale scelta può essere correttamente espressa solo dopo numerose attività operative nello stesso e in diversi contesti, sia con unità di misura non convenzionali, sia convenzionali, allo scopo di favorire

sia il percorso dalle situazioni di riferimento ai concetti, sia il ritorno dai concetti alle situazioni di riferimento, facilitando così il riconoscimento di fatti matematici in situazioni quotidiane.

QUESITO n. 4

Qual è l'unità di misura più appropriata per esprimere l'area di un campo di calcio?
 A. km^2
 B. m^2
 C. cm^2
 D. m^2

Tema: dati e previsioni

Conoscenze previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:

- Analisi e confronto di raccolte di dati mediante gli indici: moda, mediana, media aritmetica, intervallo di variazione.
- Ricerca d'informazioni desunte da statistiche ufficiali (ISTAT, Provincia, Comune, …).
- Qualificazione e prima quantificazione delle situazioni incerte.

Abilità previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:

- Consolidare le capacità di raccolta dei dati e distinguere il carattere qualitativo da quello quantitativo.
- Comprendere come la rappresentazione grafica e l'elaborazione dei dati dipenda dal tipo di carattere.
- Comprendere la necessità o l'utilità dell'approssimazione dei dati raccolti per diminuire il numero di modalità sotto osservazione.
- Qualificare, giustificando, situazioni incerte.
- Quantificare, in semplici contesti, utilizzando le informazioni possedute, in particolare l'eventuale simmetria degli esiti (equiprobabilità) e la frequenza relativa di situazioni similari.

Analisi dell'unico item presente nella prova.

Data l'importanza del tema, che offre occasioni di consolidamento di conoscenze già possedute (operazioni, frazioni, numeri decimali, approssimazioni, …) in contesti non consueti ed esempi di matematizzazione, appare riduttivo la presenza di un solo item, anche in relazione al tempo scuola dedicato al nucleo.

Le prove presentate per l'anno scolastico 2004-05 sembrano tener conto di quest'osservazione; infatti propongono quattro quesiti ed integrano l'accertamento delle conoscenze e delle abilità richiedendo la lettura di tabelle e l'interpretazione di indici statistici.

Non compaiono, finora, quesiti relativi a situazioni incerte e al calcolo della probabilità, nonostante diverse ricerche (esperienze di Fischbein) abbiano messo in evidenza che di fronte ad alcune situazioni aleatorie anche alunni giovani sono in grado di fornire risposte esatte .

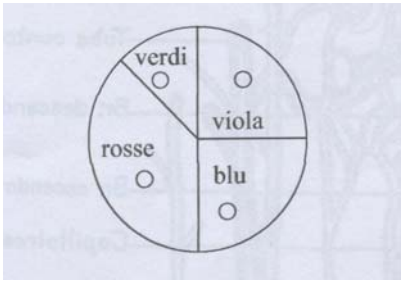
L'analisi dell'item proposto (n.18) evidenzia l'accertamento delle abilità di lettura, interpretazione, calcolo, relazione fra dati.

Il ridotto numero di risposte esatte (43 %) è probabilmente da mettere in relazione all'elevata difficoltà strategica del quesito, che per una corretta risoluzione prevede una preliminare identificazione dell'unità grafica. Le risposte A e D, anche se errate, evidenziano tuttavia una adeguata percezione visiva della soluzione, non integrata però dall'indispensabile elaborazione numerica.

Considerando che la richiesta è rivolta ad alunni che hanno da poco terminato la Scuola Primaria, la presenza nel testo dell'unità grafica sarebbe stata più consona alla prassi didattica e avrebbe certamente innalzato la percentuale di risposte positive.

QUESITO n. 18

Il grafico visualizza la quantità di biglie di diversi colori contenute in una scatola.



Se le biglie sono in totale 120, quante saranno le biglie rosse?

□ A. 40
□ B. 30
□ C. 45
□ D. 60

Tema : pensiero razionale

Conoscenze previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:

- Lessico ed espressioni matematiche relative a numeri, figure, dati, relazioni, simboli ecc.
- Relazioni tra oggetti (classificare oggetti, figure, numeri, in base ad una/due o più proprietà date e viceversa, ordinare elementi in base ad una determinata caratteristica, riconoscere ordinamenti assegnati) e le loro rappresentazioni

Abilità previste in uscita dal secondo biennio della Scuola Primaria:

- Utilizzare in modo consapevole i termini della matematica fin qui introdotti.
- Verificare, attraverso esempi, una congettura formulata.
- Classificare oggetti, figure, numeri realizzando adeguate rappresentazioni.
- In contesti diversi individuare, descrivere e costruire relazioni significative: analogie, differenze, regolarità.
- Verificare, attraverso esempi, un'ipotesi formulata.
- Partendo dall'analisi del testo di un problema, individuare le informazioni necessarie per raggiungere un obiettivo, organizzare un percorso di soluzione e realizzarlo.
- Riflettere sul procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altre possibili soluzioni

Analisi dei due item presenti nella prova

Come nel caso di dati e previsioni, il tema avrebbe richiesto un accertamento più ampio e più articolato, anche in considerazione del fatto che, essendo un nucleo di "processo", si pone come prerequisito allo sviluppo della competenza "in matematica".

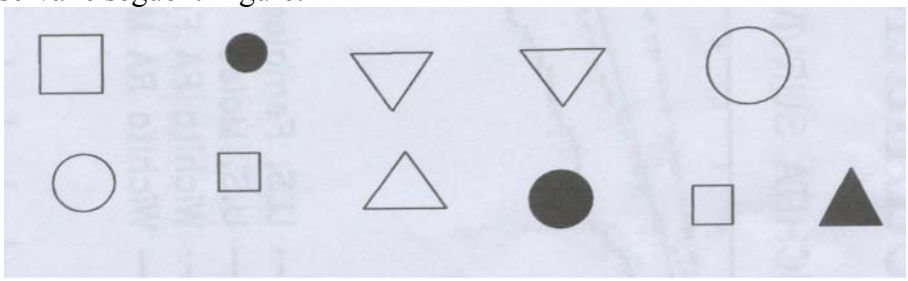
Gli item proposti riguardano solo aspetti parziali di conoscenza ("classificare figure in base ad una/due o più proprietà date e ordinare elementi in base ad una determinata caratteristica") e ancor più di abilità ("In contesti diversi individuare, descrivere e costruire relazioni significative: analogie, differenze, regolarità").

L'accertamento del nucleo richiederebbe la proposta di quesiti che indaghino gli aspetti di diagnosi, analisi e scelta delle soluzioni di un problema (fasi del problem solving) attraverso la richiesta di individuazione dei dati superflui e/o mancanti, della strategia più adatta …, come del resto indicato nelle abilità previste alla fine del ciclo primario ("Partendo dall'analisi del testo di un problema, individuare le informazioni necessarie per raggiungere un obiettivo, organizzare un percorso di soluzione e realizzarlo"; "Riflettere sul procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altre possibili soluzioni").

Questo nucleo quindi, per essere adeguatamente indagato, richiederebbe quesiti a risposta aperta, che non si conciliano né con gli obiettivi che l'INValSI si prefigge (indagare conoscenze e abilità e non competenze) né con la necessità di elaborazione statistica delle risposte.
Nell'item n.23 le cause d'errore, anche se più limitate rispetto agli altri temi (risponde esattamente il 61,5 %) potrebbero esser legate a difficoltà di comprensione del testo a causa della presenza di quantificatori logici (non tutti, qualche, almeno), non sempre proposti nei percorsi didattici della Scuola Primaria, anche se chiaramente indicati nei programmi dell'85, e di nuovo trascurati nella legge n.53/03.

QUESITO n. 23

Osserva le seguenti figure:



Quale delle seguenti affermazioni è FALSA?

- A. Non tutti i quadrati sono bianchi.
- B. Qualche triangolo è nero.
- C. Almeno un cerchio è nero.
- D. Non tutti i cerchi sono bianchi.

Mentre nell'item n.27 le cause di insuccesso potrebbero essere legate alla non abitudine ad utilizzare strategie di tipo grafico per mettere in relazione i dati di un problema.

QUESITO n. 27

Alberto ha 27 figurine; Giovanni ne ha meno di Alberto ma più di Giorgio che ne ha 19. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente FALSA?
Giovanni ha...

- A. 25 figurine.
- B. 22 figurine.
- C. 20 figurine.
- D. 18 figurine.

Conclusione

In conclusione si possono fare alcune osservazioni di carattere generale per cercare di spiegare le cause di insuccesso degli alunni nelle prove proposte dall'INValSI.
Accanto alle ormai risapute cause strutturali:

- lo scarso spazio orario, ulteriormente ridotto dalla Legge n.53/2003, assegnato all'insegnamento della disciplina, in contraddizione con la convinzione generale che l'apprendimento della matematica abbia bisogno di tempi lunghi;
- la formazione non specifica dei docenti di matematica della Scuola Primaria e soprattutto della Scuola Secondaria di I grado;

potrebbero avere una certa rilevanza, in relazione agli aspetti prettamente cognitivi:

- l'insegnamento, ancora in parte diffuso, di una matematica " stereotipata" basata sulla memorizzazione di regole, proprietà, formule e sull'esecuzione automatica di algoritmi,

quindi poco attenta alla costruzione di concetti, di ragionamenti e allo sviluppo di abilità di tipo operativo;

- la scarsa abitudine degli alunni a risolvere quesiti a scelta multipla, perché ritenuti dagli insegnanti, inadeguati, a ragione, se utilizzati come unico strumento di verifica dell' apprendimento, utili invece per consolidare capacità di analisi e di scelta;
- il contesto inusuale di alcuni item, perché legato a situazioni quotidiane e reali, poco utilizzate, per ora, nella prassi didattica che propone come campi di applicazione delle conoscenze e delle abilità contesti quasi esclusivamente di tipo matematico.

L'atmosfera di segretezza e d'anonimato che circonda le prove INValSI, mentre non ha raggiunto lo scopo di evitare resistenze e opposizioni da parte d'insegnanti e di genitori ha fatto emergere un aspetto di tipo affettivo-motivazionale che potrebbe influenzare in modo negativo i risultati. Gli alunni, vista, infatti, l'impossibilità di conoscere gli esiti del proprio lavoro, spesso non s'impegnano in modo adeguato, come possono confermare i docenti che somministrano gli item.
Questa ultima causa di insuccesso sarebbe facilmente rimossa attraverso una più capillare informazione, in ogni scuola, sul significato e sugli scopi della valutazione INValSI.

Scuola secondaria di II grado

Grazia Grassi
Scuola di Specializzazione per l'insegnamento secondario
Bologna

1. Premessa

Una riflessione articolata sulle Prove INValSI per la Scuola secondaria di II grado non può non fare riferimento a quanto le *Indicazioni nazionali per i Piani di studio personalizzati nella Scuola Secondaria di I grado,* di cui al D.L.vo n.59/2004 pongono come **nuclei fondanti** della matematica, cioè i temi: *Il numero*, *Geometria*, *Misura*, *Dati e previsioni*, *Introduzione al pensiero razionale*. Se per nucleo fondante della matematica si intendono "*contenuti chiave per la struttura stessa della disciplina, non sul piano meramente didattico, quanto sul piano fondazionale, epistemologico*", si tratta per il docente di "*elaborare strategie didattiche nelle quali lo studente viene non attirato a prendere in esame catene di contenuti, ma a partecipare alla costruzione delle proprie competenze*" (D'Amore, 2000)[6]. E' opportuno a questo punto richiamare la distinzione, posta in premessa, tra due accezioni del termine **competenza**[7]: competenza in matematica che "*si centra sulla disciplina come scienza costituita*", vista all'interno di uno specifico ambito scolare, e competenza matematica che si raggiunge quando "*un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in senso matematico*".

La struttura delle prove INValSI, articolate in quesiti a risposta multipla, consente tuttavia di valutare **conoscenze e abilità**, invece che competenze, fotografando situazioni statiche mediante un esito finale che non fornisce indicazioni sul processo con il quale l'allievo perviene ad esso né sugli aspetti che coinvolgono l'evoluzione anche affettiva all'interno della matematica.

La decisione di proporre una prova a scelta multipla trova le sue motivazioni nel D.L. n. 286 del 19/11/2004 che, tra i compiti dell' INValSI, nell'ambito dell'attivazione del " *Servizio nazionale di valutazione del sistema educativo di istruzione e formazione*" prevede l'effettuazione di " *verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze ed abilità degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni di istruzione e di istruzione e formazione professionale*".

A partire da queste premesse, si cercherà di rispondere alla domanda se le prove INValSI proposte in questi anni, in particolare le prove dell'anno 2003/2004, rispettino gli usuali risultati di apprendimento attesi per gli studenti. Al fine di rispondere a tale quesito è necessario avere a disposizione i risultati relativi ai singoli item. Alcuni risultati parziali inducono a ritenere che, in vari quesiti, di alcuni dei quali si tratterà in seguito, siano presenti elementi di novità che sicuramente hanno influito sugli esiti.

Le prove proposte nell'anno scolastico 2004/2005 sembrano, invece, molto più conformi alla prassi didattica usuale, pertanto é ragionevole attendersi anche una diversa distribuzione dei successi e degli insuccessi.

Le considerazioni seguenti, che entrano dei dettagli di alcuni degli item, riguardano l'algebra, la geometria e l'introduzione al pensiero razionale, in quanto temi per i quali è più agevole effettuare confronti con quanto accade abitualmente nella scuola poiché fanno parte della quasi totalità dei percorsi didattici sviluppati nelle classi, nonché la probabilità e la statistica che invece sono temi di più recente introduzione nei curricoli scolastici.

---

[6] D'Amore B. (2000). Contenuti, conoscenze, competenze, capacità, nuclei fondanti: la complessità dell'educazione e della costruzione del sapere. *Riforma e didattica*. 4, 35-40

[7] D'Amore B., Godino J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora

2. Algebra

Per quanto riguarda l'algebra, l'usuale prassi didattica nella Scuola Secondaria di II grado privilegia l'apprendimento algoritmico, mentre enfatizza in maniera minore l'apprendimento strategico, inteso come abitudine a risolvere problemi individuando la strategia più efficace. Il seguente item, proposto nelle prove INValSI PP3 per la classe I della Scuola Secondaria di II grado nell'A.S. 2003-2004, può essere assunto come esempio di numerosi altri item analoghi che compaiono nel medesimo test:

Classe prima A.S. 2003/2004

Quale delle seguenti proposizioni è vera?

A. Ogni numero intero divisibile per 3 è divisibile per 9.
B. Ogni numero intero divisibile per 4 è divisibile per 2.
C. Se il prodotto di due numeri interi è divisibile per 5, ognuno dei due interi è divisibile per 5.
D. Se la somma di due numeri interi è divisibile per 5, ognuno degli addendi è divisibile per 5.

In esso si richiede di porre grande attenzione alla lettura e comprensione del testo, nonché di produrre congetture da formalizzare e da validare, eventualmente nel linguaggio dell'algebra. Gli alunni possono assumere diverse strategie risolutive nei confronti del problema:

- utilizzare i numeri per formulare una congettura e dare una giustificazione del risultato a livello empirico ("*va bene nei casi verificati, quindi va bene sempre*")
- utilizzare i numeri per esplorare, formulare una congettura, essendo consapevoli della necessità di una giustificazione generale, ma riuscendo o meno a trovarla.
- imboccare una strada infruttuosa, utilizzando un formalismo non adeguato
- riuscire a giustificare in modo soddisfacente il risultato congetturato

Inoltre, il quesito in esame, proposto in un contesto d'aula, richiede la capacità di comunicare i risultati trovati, tra studenti e tra studenti ed insegnante, coinvolgendo l'uso del linguaggio naturale e di un linguaggio simbolico adeguato; agli allievi si richiedono, quindi, competenze relative al linguaggio, ad un uso contestualizzato del lessico e del simbolismo.

Gli apprendimenti sopra descritti, che non emergono dalla sola lettura della correttezza o meno del risultato, non sempre sono centrali nella valutazione, in particolare in algebra; spesso sono ritenuti risultati positivi di apprendimento quelli incentrati sull'uso preponderante di procedure di calcolo algebrico.

Per quanto riguarda l'algebra, è altresì da considerare che le prove INValSI proposte nell'anno 2004/05 sembrano richiamare maggiormente la prassi didattica corrente Numerosi item, infatti, riguardano conoscenze ed abilità in algebra viste in chiave procedurale. Esempi di tali quesiti, seppure talvolta accompagnati dalla richiesta di traduzione in simboli di una frase in lingua italiana, sono i seguenti:

Classe prima A.S. 2003/2004

Quale espressione algebrica corrisponde alla proposizione: "*Moltiplicare il quadrato della differenza di due numeri per la somma dei quadrati dei due numeri?"*

A. $(x^2 - y^2) \cdot (x + y)^2$
B. $(x - y)^2 \cdot (x + y)^2$
C. $(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2)$
D. $(x - y) \cdot (x^2 + y^2)$

oppure,

Classe terza **A.S. 2003/2004**

$(a+b)^2+(a-b)^2=$

A. $2a^2+2b^2$

B. $(a+b)^2$

C. $4ab$

D .0

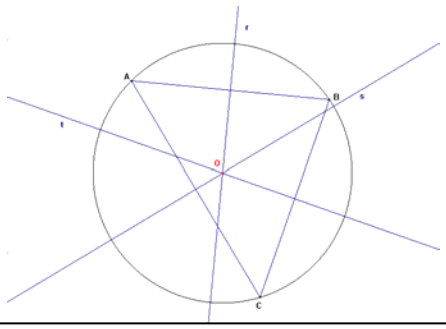
3. Geometria

Per quanto riguarda il nucleo **Geometria**, numerosi quesiti richiedono il ricorso al ragionamento deduttivo; si potrebbe dire che, nel caso della geometria, risultati positivi di apprendimento in ambito scolastico dovrebbero condurre anche ad esiti positivi nella soluzione degli item. Si può osservare che, in vari quesiti di geometria, il testo in lingua italiana è sostituito da un disegno dal quale si chiede di ricavare le informazioni necessarie per la soluzione. Ciò implica il coinvolgimento di aspetti legati alla percezione e al contratto didattico[8] che possono condizionare la risposta dell'allievo.

Si consideri, ad esempio, il seguente item, che fa parte del test proposto per la classe prima nell'A.S. 2004/2005.

Classe prima **A.S. 2004/2005**

Osserva la seguente figura:



Quale delle seguenti affermazioni relative alla figura è FALSA?

A. Il triangolo ABC è acutangolo.

B. Il punto O è l'intersezione delle altezze del triangolo ABC.

C. Le rette *r*, *s*, *t* sono gli assi dei lati del triangolo ABC.

D. I punti A, B, C sono equidistanti da O.

In esso si richiede di leggere ed interpretare un disegno assegnato, ricavando che *r*, *s*, *t* sono assi rispettivamente dei segmenti AB, BC, AC, per poi procedere con un ragionamento di tipo deduttivo. Il fatto che sia chiesta la risposta, ma non l'esplicitazione della strategia risolutiva, porta ad ipotizzare che potrebbe essere ammesso anche un ragionamento in base al quale il riconoscere la veridicità delle proposizioni assegnate sia fondato su convinzioni costruite a partire da argomentazioni e verifiche empiriche, effettuate nel registro grafico.

4. Probabilità e statistica

Tra gli elementi caratterizzanti le prove INValSI possono essere segnalati i numerosi item relativi a quesiti di probabilità o di statistica.

L'insegnamento della statistica e della probabilità è previsto dalle recenti *Indicazioni nazionali per i Piani di studio personalizzati nella Scuola Secondaria di I grado*, di cui al D.L.vo n.59/2004. Nella

[8] Laborde C. (2000). *Dessin et texte dans l'enseignement de la geométrie: leurs interrelations en évolution de l'école élementaire au début de l'enseignement secondaire*. Atti del Convegno Didattica della matematica nel III Millennio - Castel S. Pietro Terme (Bo). Bologna: Pitagora.

realtà dei fatti, questo però non costituisce ancora prassi consolidata. Espliciti riferimenti erano presenti anche nei programmi precedentemente in vigore; nonostante ciò, nella prassi didattica l'insegnamento della probabilità è stato spesso trascurato.
Probabilità e statistica costituiscono un vasto campo concettuale: richiamano concetti, procedure e rappresentazioni di diverso tipo, quali rapporti, proporzioni, frazioni, numeri decimali, tecniche combinatorie, operazioni insiemistiche, diagrammi e rappresentazioni tabulari.
In relazione alle **competenze** da raggiungere nella Scuola Secondaria di II grado, gli elementi di calcolo di probabilità e statistica rispondono all'esigenza di abituare lo studente ad effettuare modellizzazioni di situazioni in condizioni di incertezza, riferendosi ad esempi tratti dall'esperienza quotidiana e ad affrontare situazioni problematiche di varia natura, avvalendosi di modelli matematici atti alla loro rappresentazione.
In riferimento alle prove proposte per l'A.S. 2004/2005, i numerosi item che riguardano la probabilità, sia nei quesiti per la classe prima sia in quelli per la classe terza, si riferiscono alla **sola valutazione di conoscenze ed abilità**. Si tratta di quesiti che richiedono, ad esempio, di conoscere i teoremi della probabilità (probabilità totale: Item n.26, Classe terza – Tipologia B; probabilità composta: Item n.16, Classe prima) oppure di considerare casi di prove ripetute (Item n.8, Classe terza – Tipologia B oppure Item n. 30, Classe terza – Tipologia A). In un caso si fa riferimento alla definizione classica di probabilità (Item n.9, Classe prima).
I quesiti di statistica richiedono di saper leggere tabelle e grafici, coordinando il registro grafico con il registro tabulare con il registro della lingua italiana.
I quesiti sono molto spesso analoghi a quelli che si possono trovare su molti libri di testo per la Scuola Secondaria di II grado L'intenzione dei proponenti è forse di voler sottolineare l'importanza che tali argomenti diventino effettivamente parte del lavoro in classe.

5. Elementi di novità nelle prove INValSI
Gli elementi di novità (più o meno espliciti) che emergono nelle prove INValSI sono:

- Item che mirano a sottolineare il senso e il significato dei simboli e delle formule algebriche; ad esempio, saper analizzare un'espressione algebrica per effettuare congetture circa gli schemi che si evidenzieranno nella rappresentazione grafica (Item n. 3 – Tipologia B – Classe terza – A.S. 2004/2005).
- Item nei quali si richiede di analizzare una tabella (x, y) di valori, al fine di giungere, attraverso opportune congetture, ad identificare la probabile forma di un'espressione algebrica che la rappresenti. Item di tale tipo sono presenti con maggiore frequenza nella prova INValSI dell'anno 2004/2005, ad esempio l'item n.24 per la Classe prima oppure l'item n. 4 per la tipologia A – Classe terza.
- Quesiti che richiedono abilità relative all'uso sensato dei simboli correlate ad apprendimenti di tipo strategico.

Si consideri il seguente esempio:

Classe prima **A.S. 2003/2004**
Se S è l'area di un quadrato di lato a, l'area del quadrato di lato 2a è espressa da:
A. 8S
B. 4S
C. 3S
D. 2S

Lo studente può fare ricorso ad una - strategia di tipo geometrico (Fig. n.2)

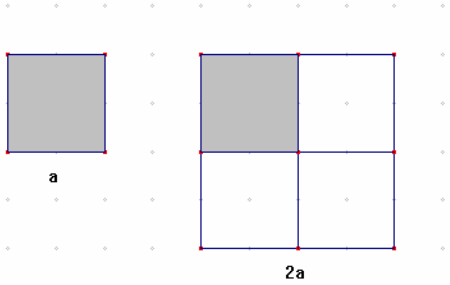


Fig. n.2

oppure ad una strategia di tipo algebrico (che richiede nominalizzazione, trattamenti algebrici, consapevolezza del ruolo del segno uguale):

$A_1 = a \cdot a = a^2$

$A_2 = (2a) \cdot (2a) = 4a^2 = 4A_1$

Analoghe considerazioni valgono per l'item n.12 – Classe terza – A.S. 2003/2004 nel quale si richiede il controllo percettivo delle relazioni geometriche che costituiscono una figura tridimensionale:

Classe Terza A.S. 2003/2004

Se V è il volume di un cubo C, qual è il volume del cubo che ha lo spigolo triplo di quello di C?

A. 3V
B. 9V
C. 18V
D. 27V

- Item nei quali si richiedono specifiche abilità di visualizzazione nello spazio euclideo tridimensionale (Item n. 15, Classe terza – Tipologia B – A.S.2004/2005).

Nell'usuale pratica di insegnamento, lo studio della geometria può **talvolta** partire dall'osservazione degli oggetti dello spazio tridimensionale in cui siamo immersi, ma questa fase è spesso solo una breve premessa per poter cominciare uno studio "serio" della geometria a partire dai concetti di punto, retta, piano, angolo … Di fatto, "*si studia solo geometria del piano e quello che si chiama geometria dello spazio a tre dimensioni non è che una mistificazione, poiché le situazioni considerate (che concernono soprattutto il calcolo di aree e di volumi) sono sempre riconducibili allo studio delle figure piane*"[9].

Il controllo percettivo delle relazioni geometriche che costituiscono una figura nello spazio consente agli studenti di esplorare la situazione proposta e di esprimere forme di ragionamento (argomentativo e/o deduttivo) che conducono a scegliere la risposta corretta.

Nell'ipotesi di un percorso didattico che partisse dal tridimensionale per giungere al bidimensionale[10], lo sviluppo sul piano di un solido, ad esempio un cubo, e la più usuale applicazione dei teoremi della geometria euclidea piana costituirebbero un secondo momento nel quale dimostrare proprietà geometriche *familiari* quali, facendo riferimento alla figura n. 3, l'isoperimetria delle sezioni esagonali del cubo.

[9] Micale B., Milone C. (2002). L'interpretazione della visualizzazione spaziale: lo spazio fa paura?. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 25B, 3, pp. 232 –253

[10] Arrigo G., Sbaragli S. (2004). *I solidi*. Roma: Carrocci Editore

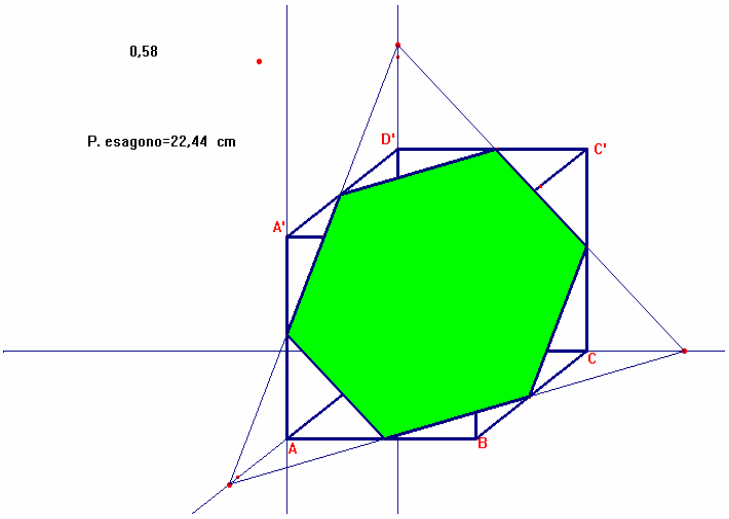


Fig. n.3

6. Le difficoltà incontrate dagli studenti e la Didattica della Matematica

La moderna Didattica della Matematica consente di leggere e fornire un'interpretazione delle difficoltà incontrate dagli studenti nelle prove INValSI.

1) È prioritario considerare che, se una valutazione non è fatta dall'insegnante di classe, ma dall'esterno, possono aversi da parte dello studente:

- *senso di smarrimento poiché non riconosce le metodologie e incontra difficoltà sia a comprendere il linguaggio con cui sono formulate le richieste sia a gestire le situazioni, in quanto inusuali*
- *mancato riconoscimento degli obiettivi della valutazione e del senso delle richieste per l'incongruenza tra gli apprendimenti raggiunti e le richieste stesse*

2) Una seconda riflessione riguarda, invece, quali apprendimenti siano effettivamente raggiunti dagli allievi delle nostre scuole: quale apprendimento dei concetti, quale apprendimento di strategie per risolvere problemi, quale apprendimento di algoritmi.
Considerazioni relative a questi punti sono, di seguito, sviluppate per due casi specifici:

- Il concetto di funzione[11] – Allegato n. 1
- Strategie risolutive in geometria[12] – Allegato n. 2

3) Nel contesto delle prove INValSI una specifica considerazione dovrà riguardare anche la "teoria delle situazioni"[13] di Guy Brousseau, con particolare attenzione al processo di implicazione/devoluzione. Infatti, le prove INValSI, talvolta, sono affrontate dallo studente con scarsa implicazione personale in quanto sono percepite dall'allievo e dal docente come esterne sia al contesto della classe e ai contratti didattici in essa vigenti sia alla singola scuola.

Le considerazioni precedenti, ancorché specifiche per la Matematica, possono essere collocate nel dibattito in corso su che cosa significhi offrire un'educazione di qualità che contribuisca, con il sistema non formale ed informale, alla formazione integrale della persona e su che cosa, nei fatti, sia ritenuto dai docenti e dalle singole istituzioni scolastiche come significativo a tale scopo. In altri termini, riguarda appieno il processo di autovalutazione della singola istituzione scolastica nonché il principio di responsabilità in base al quale ogni istituto è chiamato a rendere conto dell'efficacia e dell'efficienza del servizio e della qualità dell'offerta formativa.

[11] Benini A.M., Gianferrari L.(2005). *Valutare per migliorarsi*. Napoli: Tecnodid
[12] Benini A.M., Gianferrari L.(2005). *Valutare per migliorarsi*. Napoli: Tecnodid
[13] D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora

IL CONCETTO DI FUNZIONE
Classe Terza

Item n.30 .A.S. 2003/2004

Se $f(x) = x^2 + 2$, allora $f(x+1) =$:
A. $x^2 + 2x + 2$
B. $x^2 + 3$
C. $x^2 + 2x + 3$
D. $x^2 + x + 3$

1. Concetti e abilità matematiche coinvolti

L'item ha avuto una percentuale di risposte corrette del 30% che si discosta notevolmente dal valore medio della percentuale delle risposte esatte agli item del test per la terza superiore (46%), questo nonostante si riferisca ad un concetto, quello di funzione, che riveste la posizione di nucleo fondante nei diversi segmenti dell'iter scolastico, cioè di contenuto-chiave per la struttura stessa della matematica, non solo sul piano meramente didattico, quanto sul piano fondazionale ed epistemologico[14]. Inoltre, essendo *assegnata una* funzione quadratica, $f(x) = x^2 + 2$, espressa nel registro simbolico dell'algebra, ciò avrebbe dovuto facilitare gli studenti della scuola secondaria che dovrebbero già possedere concetti e abilità basilari in algebra.
Le considerazioni dei paragrafi seguenti hanno lo scopo di evidenziare la collocazione dei temi citati nei programmi scolastici, di valutare la coerenza del quesito con quanto nell'usuale prassi didattica è considerato risultato positivo di apprendimento nonché di porre in evidenza quali conoscenze e competenze sono coinvolte nella soluzione dell'item considerato sulla base delle risultanze della Didattica della Matematica

2. I programmi scolastici e la prassi didattica

Negli ultimi decenni, l'insegnamento/apprendimento del concetto di funzione nella scuola secondaria italiana ha sostanzialmente fatto riferimento a:

- i programmi della Scuola media inferiore, di cui alla L. n.348/1977, che, nei contenuti relativi al *metodo delle coordinate,* parlano di: "*Semplici leggi matematiche ricavate anche dal mondo fisico, economico ecc. e loro rappresentazione nel piano cartesiano; proporzionalità diretta e inversa, dipendenza quadratica, ecc*".
- i programmi previsti dalle sperimentazioni fino ad oggi attuate nella Scuola Secondaria di II grado (PNI, Brocca) che, nei primi due anni di corso, propongono un'introduzione delle funzioni come particolari sottoinsiemi del prodotto cartesiano che godono di opportune proprietà, ispirandosi alla sistemazione strutturalista di Bourbaki.
- la prassi didattica che, nel caso specifico del triennio della Scuola Secondaria di II grado, prevede la presentazione del concetto di funzione in modo ancora diverso rispetto a quanto sopra indicato, con la richiesta prevalente di tracciare il grafico di una funzione assegnata, del tipo $y = f(x)$, con x reale.

Si tratta di approcci al concetto di funzione notevolmente diversi dal punto di vista epistemologico che possono condurre ad apprendimenti fortemente contestualizzati, spesso correlati con aspetti procedurali prefissati, come nel caso del classico studio di funzione del triennio liceale. Un tale tipo di apprendimento non è facilmente trasferibile a situazioni problematiche quali quella proposta che non rientra tra le tipologie di esercizio più frequentemente assegnate.
Le recenti Indicazioni nazionali per i Piani di studio personalizzati nella Scuola Secondaria di I grado, di cui al D.L.vo n.59/2004 presentano alcune variazioni rispetto alle proposte presenti nei

[14] D'Amore B. (2000). Contenuti, conoscenze,competenze, capacità, nuclei fondanti: la complessità dell'educazione e della costruzione del sapere. *Riforma e didattica*. 4, 35-40

programmi precedentemente in vigore, prevedendo che siano affrontati, in relazione agli obiettivi di apprendimento per la classe terza:

- Alcune relazioni significative (essere uguale a, essere multiplo di, essere maggiore di, essere parallelo o perpendicolare a, ….
- Funzioni: tabulazioni e grafici.
- Funzioni del tipo y=ax, y=a/x, $y=ax^2$ e loro rappresentazione grafica.
- Semplici modelli di fatti sperimentali e di leggi matematiche.

In particolare, compare in modo esplicito il riferimento ai modelli matematici di fenomeni reali.
In relazione, invece, alle competenze in algebra, disciplina che è un tradizionale asse portante dell'insegnamento nella Scuola Secondaria di II grado almeno per quanto riguarda lo studio delle tecniche di manipolazione simbolica, nelle medesime Indicazioni nazionali per i Piani di studio personalizzati nella Scuola Secondaria di I grado si trovano, agli obiettivi di apprendimento della classe terza, specifici riferimenti a:

- Scrittura formale delle proprietà delle operazioni e uso delle lettere come generalizzazione dei numeri in casi semplici.
- Elementi fondamentali di calcolo algebrico.
- Utilizzo delle lettere per esprimere in forma generale semplici proprietà e regolarità (numeriche, geometriche, fisiche, …).

Le risposte all'item in esame hanno, però, evidenziato come, anche dopo anni di studio dell'algebra, gli studenti delle scuole superiori fatichino a padroneggiare il senso dei simboli che usano, limitandosi ad una trattazione formale non sempre corretta. Numerosi studenti, infatti, non sono riusciti ad applicare consapevolmente le strutture che soggiacciono ad abilità di tipo algebrico, come richiesto per sostituire una variabile con un'altra espressione letterale contenente la variabile stessa.
La ricerca di una motivazione agli insoddisfacenti risultati ottenuti dagli allievi non può tralasciare di considerare la prassi didattica quotidiana dove prevale un approccio che, per tradizione, privilegia gli aspetti sintattici dell'algebra a scapito di considerazioni sugli aspetti semantici del linguaggio algebrico.
A partire da queste considerazioni, è opportuno riflettere su quali abilità e competenze[15] dovrebbero effettivamente essere possedute dagli studenti di una classe terza di Scuola Secondaria di II grado, per affrontare con successo il quesito proposto.

3. Competenze e Didattica della Matematica

3.1 Il concetto di funzione

Una piena comprensione del concetto di funzione comporta che gli studenti possiedano competenze non solo cognitive, ma anche procedurali e strategiche, per stabilire relazioni tra concetti, procedure risolutive e rappresentazioni semiotiche.
La costruzione di un concetto matematico, e quindi anche di quello di funzione, è in relazione con il saper gestire diverse rappresentazioni semiotiche[16]. In particolare, è necessario che un concetto sia rappresentato in un dato registro, trattato all'interno del registro rappresentativo stesso e la sua rappresentazione sia poi convertita da un registro all'altro. Ad esempio, una funzione del tipo $f(x) = x^2 + 2$ può essere pensata come un insieme di coppie ordinate secondo la concezione strutturale tratta da Bourbaki nella quale la funzione è vista come oggetto oppure, secondo una visione operativa, come processo di calcolo o metodo ben definito per passare da un insieme di valori ad un altro oppure può essere rappresentata mediante un grafico che incoraggia un approccio di tipo olistico e strutturale.

[15] Si considera qui il termine competenza nelle due accezioni di *competenza in matematica* (centrata sulla disciplina, come oggetto proprio, specifico di conoscenza) e di *competenza* matematica (quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in senso matematico) che si riscontra in D'Amore B., Godino J., etc, cit.
[16] D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora

Un ulteriore interessante aspetto relativo ad abilità e conoscenze coinvolte nell'apprendimento del concetto di funzione è evidenziato nei materiali elaborati dall'Unione Matematica Italiana (2003)[17] dove, per il primo biennio della Scuola Secondaria di II grado, si sottolinea il ruolo fondamentale dell'acquisizione da parte dello studente dell'abilità di usare consapevolmente le funzioni come modello matematico di un "fenomeno" reale al fine di:

- Individuare, in situazioni problematiche, relazioni significative tra grandezze di varia natura (per esempio, variazione di una grandezza in funzione di un'altra)
- Costruire modelli sia discreti che continui di evoluzione di fenomeni nel tempo.
- Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare relazioni e funzioni (notazione funzionale, tabulare e grafici).

Si tratta, pertanto, di fare riflettere consapevolmente gli studenti sull'opportunità di effettuare determinati tentativi di risoluzione di un problema e di riconoscere situazioni significative alle quali applicare specifiche conoscenze dichiarative e procedurali.[18]

3.2 L'insegnamento/apprendimento dell'algebra

Nell'item in esame, le due espressioni algebriche da confrontare: $f(x) = x^2 + 2$ e $f(x+1) = x^2 + 2x + 3$, denotano lo stesso oggetto (l'insieme dei punti di due parabole uguali per traslazione), ma hanno diverso senso algebrico, cioè è diverso il modo in cui l'insieme dei punti di ciascuna parabola può essere rappresentato attraverso l'applicazione di regole computazionali. Inoltre, i simboli algebrici in gioco possono assumere, oltre al senso algebrico sopra descritto, altri sensi propri, ad esempio, del dominio di conoscenza della geometria analitica e delle isometrie piane in forma algebrica (nel caso specifico, si tratta di una traslazione in direzione parallela all'asse *x*).

E' evidente che gli studenti che hanno fornito risposte scorrette hanno percepito il codice simbolico dell'algebra nei suoi aspetti solo sintattici, mentre è emersa contestualmente una certa debolezza semantica, soprattutto allorché l'algebra avrebbe dovuto essere strumento per generalizzare e per evidenziare analogie strutturali, come nell'item proposto.

La centralità di strategie didattiche che, nell'insegnamento dell'algebra, mirino all'acquisizione di competenze in ambito algebrico quali:

- cogliere il senso e il significato dei simboli e delle formule algebriche che si usano
- analizzare un'espressione algebrica per effettuare congetture circa gli schemi che si evidenzieranno nella rappresentazione numerica o grafica
- analizzare una tabella di valori di una funzione oppure un grafico, al fine di giungere, attraverso opportune congetture, ad identificare la probabile forma di un'espressione algebrica che lo rappresenti,

competenze queste da perseguire a partire da attività che favoriscono tali processi (dialogo tra pari, mediazione del linguaggio naturale, esplorazioni e congetture anche con il ricorso alle tecnologie), diventa, pertanto, un'esigenza pressante e non più eludibile, nell'ambito di un complessivo ripensamento dell'insegnamento della matematica.

4. Conclusioni

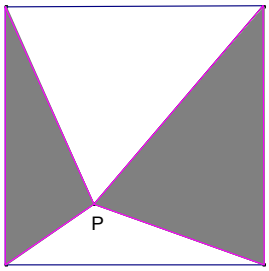
Le considerazioni formulate possono essere trasferite al commento di altri item presenti nelle prove INValSI. La verifica degli apprendimenti e la riflessione costante sui risultati dell'apprendimento stesso sono, quindi, aspetti fondamentali da curare in modo continuo nel processo di insegnamento/apprendimento; soprattutto, in un quadro di ordinamenti come delineato dalla L. n.53/2003 e dal Decreto legislativo n.59/2004, dove si richiede di declinare gli obiettivi specifici di apprendimento in obiettivi formativi significativi per gli studenti in relazione al profilo educativo, culturale e professionale dell'allievo al termine di ciascun ciclo di istruzione.

[17] http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2003/matematica2003.html
[18] Fandiño Pinilla M.I. (2002) in: D'Amore B., Godino J.et alii, cit.

Classe Prima

Item n. 27 - Classe Prima

Disegna le altezze uscenti da P dei due triangoli colorati. Qual è il rapporto tra l'area del quadrato e l'area della regione colorata?



A. 2,5
B. 2
C. $\frac{1}{2}$
D. Varia al variare di P

1. Concetti ed abilità matematiche coinvolti

L'item proposto presenta un quesito di geometria che riguarda il concetto di equiestensione di superfici piane, contenuto-chiave nella struttura della matematica in quanto radice cognitiva per la costruzione della teoria della misura delle superfici piane.

La tipologia del quesito (item a scelta multipla) valuta la sola correttezza o meno del risultato (in termini di abilità, *Sapere calcolare l'area di una figura piana*), ma non i processi risolutivi messi in atto da ciascun allievo, né le conoscenze, le abilità e gli atteggiamenti sviluppati in relazione alle strategie di soluzione.

La formulazione non standard del testo del problema si discosta da quella propria dei problemi di una prassi didattica tradizionale che prevede, invece, un testo sintetico da cui trarre un certo numero di informazioni, con parole e numeri, ritenute sufficienti dall'estensore per raggiungere l'obiettivo richiesto dal quesito contenuto nel testo stesso.

La percentuale di risposte esatte conferma la percentuale media nazionale per la classe prima della Scuola Secondaria di II grado (50% di risposte corrette); ciò può fare supporre la coerenza del quesito con quanto, nell'usuale prassi didattica, è considerato risultato positivo di apprendimento nonché con i temi presenti nei programmi ministeriali.

2. I programmi scolastici e la prassi didattica

Il quesito proposto risulta coerentemente collocato in relazione ai programmi scolastici, a partire dai Programmi per la Scuola Media (1979) in vigore fino allo scorso anno, nei quali, tra gli obiettivi generali, si trova citato, "*Porsi problemi e prospettarne soluzioni*"mentre, tra i contenuti riferiti al Tema: *Problemi ed equazioni*, sono elencati: "*Individuazione di dati e di variabili significative in un problema. Risoluzione mediante ricorso a procedimenti diversi (diagrammi di flusso, impostazione e calcolo di espressioni aritmetiche ...)*".

Con riferimento all'insegnamento della geometria per la classe terza, le recenti *Indicazioni nazionali per i Piani di studio personalizzati nella Scuola Secondaria di I grado*, di cui al D.L.vo n.59/2004, parlano di "*Risolvere problemi usando proprietà geometriche delle figure, ricorrendo a modelli materiali e a semplici deduzioni e ad opportuni strumenti di rappresentazione (riga, squadra, compasso e, eventualmente, software di geometria*", sottolineando, in relazione al nucleo *Introduzione al pensiero razionale*, l'importanza di *"documentare i procedimenti scelti e applicati*

nella risoluzione dei problemi, valutare criticamente le diverse strategie risolutive di un problema".
Nei programmi previsti dalle sperimentazioni fino ad oggi attuate nella Scuola Secondaria di II grado (PNI, Brocca), si ricorda che "*il termine problema va inteso nella sua accezione più ampia, riferito cioè anche a questioni interne alla stessa matematica*"; tale frase pare sottolineare, il punto delicato del passaggio tra la fase in cui agli allievi è richiesto di verificare proprietà geometriche a partire da ragionamenti di tipo argomentativo (proprio dei primi livelli scolastici) e la successiva fase, tipica della scuola di secondo grado, in cui invece è richiesto di dimostrare proprietà matematiche.
Il problema di geometria proposto è classificabile, nella prassi didattica usuale, come *problema matematico scolastico*, nel quale la domanda finale è una tra le tante possibili, la cui unica relazione con il quadro contestuale di riferimento consiste nel richiedere l'uso dei dati in esso esplicitati.
La scelta di ricorrere nella formulazione dell'item al registro grafico-visuale, anziché all'abituale registro del linguaggio verbale, ha lo scopo di rimuovere alcuni conflitti e ostacoli cognitivi che intervengono ancor prima della fase di risoluzione, con difficoltà ed errori che possono manifestarsi al momento della lettura e comprensione del testo del problema allorché accade che lo studente legge il testo senza comprenderlo e, pertanto, non è in grado di tradurlo in un corretto modello matematico (algebrico, grafico …). La lettura e la comprensione di una rappresentazione grafica, però, implicano il possesso di competenze correlate all'interpretazione geometrica e alla formulazione di ipotesi su un disegno dato (il quadrilatero è un quadrato, gli angoli interni sono retti …) che coinvolgono aspetti del contratto didattico[19] instaurato tra docente e allievi nella classe e che non sono frequenti nell'usuale prassi scolastica.
Inoltre, la richiesta di riconoscere l'equivalenza della parte colorata e della parte bianca del quadrato, nel contesto statico di una rappresentazione su carta, presuppone la consapevolezza della diversità concettuale tra isoperimetria ed equiestensione di figure piane. Nella realtà di classe, tali concetti sono talvolta confusi dagli allievi e ciò dipende dal fatto che le figure geometriche sono spesso presentate attraverso un disegno nel quale l'attenzione è posta sulla linea disegnata e non sul suo interno, nonostante anche nei Programmi della Scuola media inferiore (1979), negli Orientamenti per la lettura dei contenuti si evidenzi che: "*lo studio della geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure, che ne renda evidenti le proprietà nell'atto del loro manifestarsi*".

3. Competenze e strategie per la soluzione di problemi
Nell'attività di risoluzione di un problema, la presenza di un obiettivo e la mancanza di un procedimento automatico per raggiungerlo determinano la necessità di **prendere decisioni.** Schoenfeld [20] ha distinto tra decisioni tattiche (che hanno carattere locale, ad esempio, scegliere di utilizzare un procedimento trigonometrico o un procedimento algebrico per calcolare un'area) e **decisioni strategiche** che si pongono ad un livello di gestione più generale. In particolare, in ambito scolastico i problemi sono spesso di tipologia convenzionale (devono sempre avere una soluzione, bisogna utilizzare tutti i dati assegnati e fare riferimento alle conoscenze apprese); difficilmente possono essere collocati in un quadro interpretativo più ampio dove al termine **problema** possa davvero essere attribuito il seguente significato:
Problema: "*quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del solutore; alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione; a*

[19] "*In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere il problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico*" (Brousseau G. (1980), Les échecs électifs dans l'einseignement des mathématiques à l'école élémentaire, *Revue de laryngologie, otologie,rhinologie*, 101,3-4,107-131.
[20] Citato in Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna:Pitagora.

volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto creativo da parte del solutore"[21]

Se, agli studenti che hanno risposto correttamente al quesito in esame, si chiedesse di giustificare la risposta fornita si riscontrerebbero strategie e livelli di giustificazione diversi:

- Risposte corrette basate su considerazioni di tipo percettivo del tipo "*Si vede…"*, senza indicazioni relative a segmenti eventualmente tratteggiati (due di questi segmenti coincidono con le altezze dei triangoli di cui parla il testo) e ai triangoli a due a due uguali che si formano
- Risposte corrette basate su misure, anche molto approssimate, rilevate con il righello e al calcolo di aree in ambiente numerico;
- Risposte corrette basate su una giustificazione di tipo sperimentale (scomposizione e ricomposizione della figura nelle parti bianche e grigie, per formare due quadrilateri equivalenti per sovrapposizione).

Si tratta di strategie basate su congetture che trovano conferma in verifiche sostenute da un ragionamento di tipo argomentativo[22]. L'argomentazione è ritenuta un ragionamento allo stesso titolo di una dimostrazione: la differenza sta nella forma di organizzazione e nella forte componente finalizzata a convincere l'interlocutore. L'argomentazione non è una dimostrazione, ma in certi casi può aprire la strada al ragionamento di tipo dimostrativo così ampiamente utilizzato nell'insegnamento della geometria nella Scuola Secondaria di II grado.

Uno studente buon risolutore di problemi dovrà, quindi, essere competente in ciascuna delle seguenti fasi:

- *Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche di situazioni e fenomeni matematici e non, per affrontare problemi.*
- *Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata.*
- *Confrontare i risultati con le aspettative. Individuare le cause delle inadeguatezze con opportni elementi di controllo ritenuti importanti all'avvio del processo risolutivo.*
- *Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie prodotte, discutendone l'efficacia e la validità.*[23]

Agli allievi si richiede, pertanto, di conoscere la matematica, di essere mossi da convinzioni positive nei riguardi della disciplina, di saper gestire gli aspetti semiotici degli oggetti di apprendimento, di scegliere le strategie risolutive e, soprattutto, di gestire la comunicazione matematica cioè argomentare, giustificare e dimostrare. In altre parole, si chiede di acquisire *competenza matematica*[24] che permetta di affrontare in modo consapevole situazioni di problem-solving.

[21] D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora

[22] Duval R. (1996). Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva. *La matematica e la sua didattica*. 2, 1996, 130 -152.

[23] http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2003/matematica2003.html

[24] o Pinilla M.I. (2002). D'Amore B., Godino J., Arrigo G., Fandin*Competenze in matematica.* Bologna: Pitagora.